

رایانش کوانتومی توپولوژیک

وحید کریمی پور- دانشکده فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف

۶ اسفند ۱۴۰۴

۱ مقدمه

در این فصل به موضوع رایانش کوانتومی توپولوژیک می پردازیم و آن را بهانه ای قرار می دهیم برای گشت و گذار در موضوعات دیگری که هم به دلیل ارتباط رایانش توپولوژیک با آنها و هم به دلایل دیگر جالب و مهم هستند. این موضوعات گستره نسبتاً وسیعی را می پوشانند، از نظریه گره^۱ و گروه گیسو^۲ گرفته تا معادله یانگ باکستر^۳ و نظریه میدان توپولوژیک^۴، از نظم توپولوژیک^۵ گرفته تا آنیون های آبلی و غیرآبلی. بدلیل گستردگی این مطالب مرور ما از آنها یک مرور کوتاه است و تنها به بیان تعاریف و خواص کلی بسنده می کند. تعاریفی هم که بیان می کنیم خیلی کیفی و شهودی هستند، مثلاً تعریف دقیقی از توپولوژی یا فضای توپولوژیک ارائه نمی کنیم. در نتیجه خواننده برای مطالعه دقیق تر هر کدام از آنها می بایست به مقالات و کتب دیگر نگاه کند. آنچه که در تمامی این حوزه جالب است پیوستگی موضوعات متنوع در ریاضیات و فیزیک با یکدیگر است، پیوندهایی که به غنا و زیبایی مفهومی و ساختاری این حوزه منجر شده است. خواننده ای که با این موضوعات آشنایی قبلی دارد یا اینکه می خواهد مستقیماً به سراغ رایانش توپولوژیک برود می تواند مطالعه این فصل را از بخش (۷) شروع کند، بدون آنکه چیزی از دست بدهد.

^۱ Knot Theory

^۲ Braid Group

^۳ Yang-Baxter equation

^۴ Topological Field Theory

^۵ Topological Order

۲ ناوردهای توپولوژیک

موضوع توپولوژی مطالعه شکل ها و فضاهاست و شاید مهم ترین مسئله در آن این است که تشخیص دهیم آیا دو فضا را از نظر کیفی معادل هستند یا نه. از نظر کیفی در این جا به این معناست که آیا با تغییرات پیوسته ای یک فضا به یک فضای دیگر تبدیل می شود یا نه؟ مثلاً یک دایره و یک بیضی توپولوژی یکسانی دارند اما یک دایره با یک پاره خط توپولوژی یکسانی ندارد زیرا دایره یک فضای یک بعدی بدون مرز است و پاره خط دو نقطه مرزی دارد. هم چنین سطح کره دوبعدی با سطح یک بیضی گون از نظر توپولوژیک یکسان هستند ولی سطح یک کره با سطح یک چنبره یکسان نیست. وقتی به فضاهای پیچیده تر می پردازیم تشخیص توپولوژی یک فضا یکسان نیست بخصوص وقتی که این فضاها خارج از فضای سه بعدی ما قرار می گیرند و تصورشان برای ما امکان پذیر نیست. با این وجود باز هم می توان به صورت ریاضی دقیق معادل بودن توپولوژیک را تعریف کرد. البته پیش نیاز این تعاریف این است که تعریف فضای توپولوژیک را بشناسیم. در این درس فرصت پرداختن به این تعاریف وجود ندارد و خواننده می بایست به یک کتاب مقدماتی توپولوژی نگاه کند. تنها چیزی که باید بدانیم این است که فضای توپولوژیک یک مجموعه است که می توان در آن مفهوم پیوستگی نگاشت ها از یک فضا به دیگری را تعریف کرد، بدون آنکه نیازی داشته باشیم تا روی این فضاها مختصات تعریف کنیم.

■ تعریف: دو فضای X و Y را معادل یا همریخت^۶ می گوئیم (و می گوئیم که توپولوژی یکسانی دارند) هرگاه یک تابع پیوسته و وارون پذیر بین این دو فضا وجود داشته باشد. این همان تناظر یک به یک بین این دو فضا است. معادل بودن دو فضا را به این صورت نشان می دهیم که:

$$X \approx Y. \quad (1)$$

علیرغم این تعریف تحقیق این که آیا دو فضای متفاوت توپولوژی یکسانی دارند چندان ساده نیست. در واقع به صورت کلی تشخیص همریخت بودن دو فضا اصلاً مسئله ساده ای نیست. ریاضیدان ها برای تمیز دادن دو فضا از نظر توپولوژیک ابزارهای جالب و دقیقی را طراحی کرده اند. این ابزار ها را ناوردهای توپولوژیک^۷ می گویند. این ناوردها می توانند شکل های متفاوتی داشته باشند. به عنوان مثال گروه هموتوپی اول^۸ نشان می دهد که آیا همه منحنی های بسته درون یک فضا انقباض پذیر^۹ هستند یا نه. یعنی اینکه آیا هر منحنی در این فضا را می توان به طور پیوسته به یک نقطه جمع کرد یا اینکه یک مانع توپولوژیک^{۱۰} از این کار جلوگیری می کند. به صورت خیلی کیفی، در گروه هموتوپی اول عضو

Homeomorphic^۶
Topological Invariants^۷
First Homotopy Group^۸
Contractible^۹
Topological Obstruction^{۱۰}

خنثی یک منحنی انقباض پذیر است. منحنی هایی که به طور پیوسته به هم تبدیل می شوند همگی یکسان در نظر گرفته می شوند یا به عبارت دیگر، هر عضو این گروه کلاس هم ارزی منحنی هایی است که به طور پیوسته به هم تبدیل می شوند. ضرب کردن دو منحنی به معنای طی کردن دومی پس از اولی است. وارون یک عضو نیز به معنای طی کردن یک منحنی در جهت عکس است. خواننده برای تعریف دقیق گروه هموتوپی می تواند به یک کتاب یا مقاله مراجعه کند.^{۱۱} به عنوان مثال تمام منحنی های روی سطح کره دوبعدی تراکم^{۱۲} پذیرند و می گوئیم که گروه هموتوپی اول کره یک گروه بدیهی یک عضوی است

$$\pi_1(S_2) = \{e\}.$$

ولی همه منحنی های بسته روی چنبره چنین نیستند. می توان نشان داد که برای چنبره رابطه زیر برقرار است:

$$\pi_1(Torus) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

ناوردای توپولوژیک همواره چنان تعریف می شود که در تعریف زیر صدق کند:

■ تعریف: یک ناوردای توپولوژیک مثل I دارای این خاصیت است که

$$\text{if } X \approx Y, \quad \text{then } I(X) = I(Y). \quad (۲)$$

فایده پیدا کردن ناوردهای توپولوژیک این است که یک روش محاسبه مشخص (اگر چه نه الزاما آسان) برای آنها وجود دارد و اگر در پایان محاسبه به این نتیجه برسیم که $I(X) \neq I(Y)$ آنگاه قطعا با استفاده از قضیه بالا به این نتیجه می رسیم که X با Y معادل نیست. دقت کنید که ناوردای توپولوژیک نمی گوید که آیا دو فضا با هم یکی هستند بلکه تنها می گوید که دو فضای خاص با هم یکی نیستند. در صورتی که فهرست کاملی از ناوردها داشته باشیم یا این که یک یا چند ناوردای قوی داشته باشیم که این رابطه را به صورت دو طرفه برقرار کنیم می گوئیم که یک طبقه بندی از یک دسته از فضاهای توپولوژیک انجام داده ایم. به عنوان مثال تمام فضاهای دو بعدی جهت پذیر و بدون مرز تنها با یک ناوردای توپولوژیک طبقه بندی می شوند. این ناوردای توپولوژیک جنس^{۱۳} نامیده می شود. شکل (۱) مفهوم جنس یک سطح دو بعدی را نشان می دهد. می توان به جای جنس از مشخصه اویلر که رابطه نزدیکی با آن دارد نیز استفاده کرد.

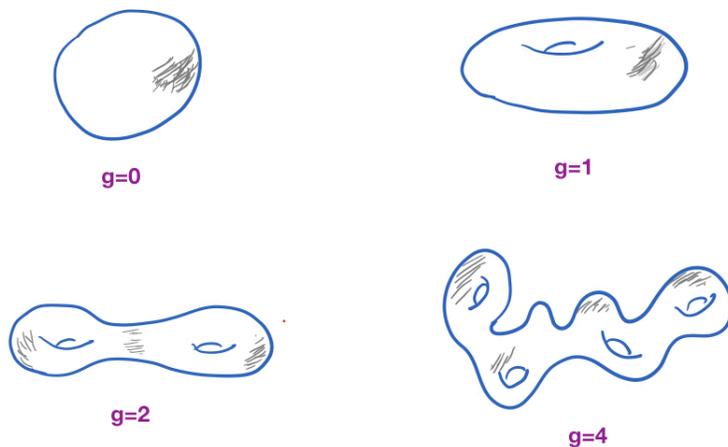
■ تمرین:

Nakahara, Geometry and Topology in Physics^{۱۱}
 Contractible^{۱۲}
 Genus^{۱۳}

می توان یک سطح دو بعدی را با یک شبکه از چندضلعی ها پوشاند. این شبکه را اصطلاحاً مثلث بندی^{۱۴} سطح می گویند اگرچه چندضلعی ها لزوماً مثلث نیستند. برای این شبکه مشخصه اویلر^{۱۵} به صورت زیر تعریف می شود:

$$\chi = V - E + F, \quad (۳)$$

که در آن V تعداد راس ها، E تعداد اضلاع و F تعداد وجه هاست. ثابت می شود که مشخصه اویلر یک ناوردای توپولوژیک است. مشخصه اویلر را برای این سطوح پیدا کنید: یک کره، یک چنبره با جنس یک. سپس نوع مثلث بندی را به دلخواه خود تغییر دهید و تحقیق کنید که مشخصه اویلر یک سطح ربطی به نوع مثلث بندی ندارد. نشان دهید که برای این سطوح رابطه زیر برقرار است: $\chi = 2 - 2g$.



شکل ۱: طبقه بندی تمام سطوح دو بعدی بدون مرز و جهت پذیر

^{۱۴}Triangulation
^{۱۵}Euler Character

۳ ناوردهای گره ها

یک طناب را می توانید به شکل های مختلفی گره بزنید. خیلی از این گره های مختلف را نمی توانید به طور پیوسته یعنی بدون پاره کردن گره (یا باز کردن کامل گره) به هم تبدیل کنید. این گره ها را گره های غیر معادل می نامیم. دو گره را که بتوانیم بدون پاره کردن به یکدیگر تبدیل کنیم گره های معادل می خوانیم. نخستین بار لرد کلونین با توجه به این خاصیت که گره ها به سادگی به هم تبدیل نمی شوند، تصویری از اتم ها را طرح کرد که در آن هر اتم چیزی نیست جز یک گره درون اتر^{۱۶} که آن موقع هنوز مورد قبول بود. در نظریه اتم های ساده گره های ساده ای در اتر هستند و اتم های بزرگ تر گره های پیچیده تر. بنابراین هیدروژن یک گره ساده در اتر است و هلیوم یک گره کمی پیچیده تر و الی آخر و پایداری اتم ها نیز از تبدیل نشدن این گره ها به یکدیگر ناشی می شود. مثل خیلی دیگر از ایده های فیزیکی این ایده نیز برای خود افت و خیز هایی داشته و در برهه هایی به کلی کنار گذاشته شده و در زمان های دیگر به شکل های دیگر احیا شده است. امروزه می دانیم که تصور کلونین از اتم ها به کلی اشتباه است ولی هر چه که بود نظریه او سرآغاز پیوند بین ریاضیات و فیزیک در مطالعه گره هاست. از نظر ریاضی می توان یک گره را نشانیدن^{۱۷} یک دایره در فضای سه بعدی در نظر گرفت. معنای این حرف این است که یک گره مثل K در واقع تصویر یک دایره تحت یک نگاشت پیوسته به فضای سه بعدی است. به عبارت دیگر

$$f : S_1 \rightarrow R^3 \quad (۴)$$

یک گره را تعریف می کند هرگاه f یک نگاشت پیوسته باشد. تحت این شرایط تصویر دایره در فضای سه بعدی یک گره مثل K است. یعنی $K = f(S_1)$. از نظر ذاتی (یعنی از نظر موجودی که روی دایره زندگی می کند و به فضای سه بعدی بیرون دسترسی ندارد) همه گره ها چیزی جز دایره نیستند. آنچه که آنها را از هم متمایز می کند نحوه نشانیدن آنها در فضای سه بعدی است. بنابراین معادل بودن دو گره به این معنی نیست که خود آنها به عنوان موجوداتی که هم ارز دایره هستند با هم معادل باشند بلکه این است که نحوه نشانیدن^{۱۸} آن ها در فضای سه بعدی با هم معادل باشد. بنابراین دو گره K_1 و K_2 را معادل می خوانیم وقتی که شرط زیر برقرار باشد.

^{۱۶}Ether

^{۱۷}Embedding

^{۱۸}Embedding



(a)



(b)



(c)

شکل ۲: چند نمونه از گره های غیر معادل

■ تعریف: دو گره K_1 و K_2 معادل خوانده می شود هرگاه یک نگاشت پیوسته و وارون پذیر $R^3 \rightarrow R^3$ و g وجود داشته باشد به قسمی

$$g(K_1) = K_2$$

که تحت این نگاشت K_1 به K_2 نگاشته می شود.

از نظر شهودی این رابطه می گوید که می توانید یک گره را به طور پیوسته تغییر شکل داده و به گره دیگر تبدیل کنید. سوالی که از چندین دهه پیش توجه ریاضیدانان را به خود جلب کرده این است که انواع گره های غیر معادل کدام ها هستند. آیا می توان همه گره ها را طبقه بندی کرد و تمام گره های معادل را در یک طبقه جای داد؟ شکل (۲) چند نوع گره را نشان می دهد. شکل (۱) نیز چند نوع سطح دوبعدی را نشان می دهد. در مورد سطوح دو بعدی مدتهاست که یک طبقه بندی کامل انجام شده است یعنی این که می دانیم سطوح دوبعدی بدون مرز و جهت پذیر تنها با یک پارامتر گسسته به نام جنس^{۱۹} شناسایی می شوند. در مورد گره ها وضعیت بسیار پیچیده تر است و هنوز هیچ نوع طبقه بندی ای صورت نگرفته است. همین چند شکل ساده از گره ها نیز نشان می دهد که نمی توان امیدی داشت که گره ها با تعداد کمی پارامتر از هم تمیز داده شوند.

به عنوان مثال ممکن است کسی فکر کند که تعداد تقاطع^{۲۰} وقتی که گره ها را روی یک صفحه دوبعدی تصویر می کنیم، گره ها را طبقه بندی می کند. ولی کمی تمرین نشان می دهد که می توان با یک تعداد مشخص تقاطع تعداد بسیار زیادی گره های غیر معادل داشت و هر چه که تعداد این تقاطع ها زیاد می شود تعداد گره ها نیز زیادتر خواهد شد.

■ تمرین: چند گره غیر معادل رسم کنید که هرکدام دو تا تقاطع داشته باشند. همین کار را برای گره هایی که دارای سه تا تقاطع باشند

^{۱۹}Genus
^{۲۰}Crossings

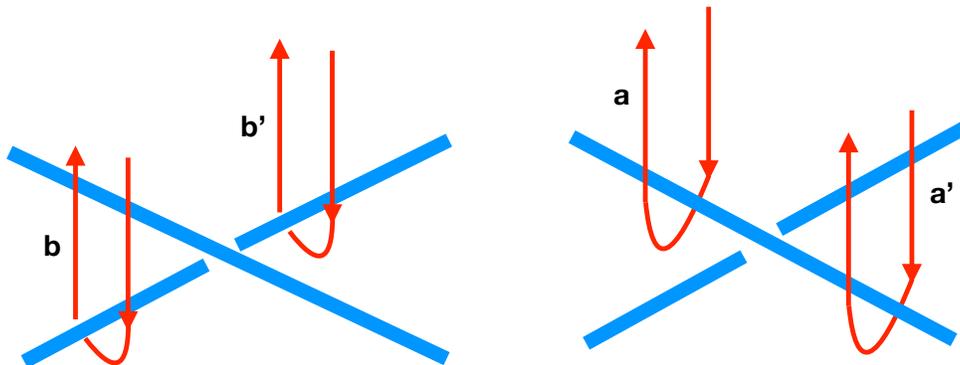
تکرار کنید.

اما می توان پرسید که طبقه بندی گره ها در ریاضیات چه اهمیتی دارد؟ چرا باید ریاضیدان ها و اخیراً نیز فیزیکدان ها وقت خود را صرف چنین مسئله ای کنند. یکی از پاسخ های این مسئله به طبقه بندی فضاهای توپولوژیک سه بعدی مربوط است. همانطور که طبقه بندی سطوح دوبعدی را می دانیم، می توانیم بررسی کنیم که انواع فضاهای توپولوژیک سه بعدی بدون مرز و جهت پذیر سه بعدی کدام ها هستند؟ پاسخ این سوال تا کنون داده نشده است. اما یک پیشرفت مهم در آن صورت گرفته است و آن اینکه نشان داده شده طبقه بندی گره ها به طبقه بندی فضاهای توپولوژیک سه بعدی کمک می کند و حتی با آن هم ارزش است.

به این ترتیب اگر بتوانیم انواع گره های غیر معادل را بشناسیم می توانیم انواع فضاهای سه بعدی غیر معادل را نیز بشناسیم و می دانیم که شناسایی گره ها که نسبت به فضاهای سه بعدی اشیای ملموس تری هستند بسیار ساده تر است. این موضوع انگیزه تلاش های طولانی را برای شناسایی گره ها را روشن می کند. نخستین تلاش این بوده که می توان یک گره را که در فضای سه بعدی غوطه ور است روی یک صفحه تصویر کرد. در این تصویر گره تبدیل می شود به یک منحنی بسته که تعدادی تقاطع دارد. در این تقاطع ها همواره یک خط بر روی خط دیگر قرار می گیرد. می توان به جای خود گره تصویر آن را در فضای دو بعدی مطالعه کرد. البته به طور دقیق نباید بگوییم که گره را در فضای دو بعدی تصویر می کنیم بلکه گره را به اصطلاح پخ می کنیم تا تبدیل شود به یک منحنی تقریباً مسطح با تعدادی چهار راه ^{۲۱} که در آن منحنی ها از روی هم رد می شوند. مثل اتوبان ها در شهرهای بزرگ. وقتی به این تصویر فکر می کنیم مطالعه گره آسانتر می شود. به عنوان مثال می توانیم گروه هموتوپی گره را به شکل زیر مطالعه کنیم. نخست گره را کمی ضخیم می کنیم و به شکل یک تیوب در می آوریم. سپس این تیوب را که در امتداد گره شکل گرفته از فضای سه بعدی خارج می کنیم. آنچه که باقی می ماند فضای سه بعدی است که یک تونل پیچ در پیچ در آن وجود دارد که در جای خالی گره شکل گرفته است. منظور از گروه هموتوپی گره، گروه هموتوپی این فضا یعنی فضای $R^3 - K$ است. سپس مطابق با تعریف گروه های هموتوپی یک نقطه ثابت در فضا اختیار می کنیم. این نقطه را معمولاً در بالای صفحه ای که گره روی آن تصویر شده و در فاصله خیلی زیاد در نظر می گیریم. (البته مقدار این فاصله اهمیتی ندارد.) سپس به ازای هر تقاطع و مطابق شکل (۳) منحنی هایی از این نقطه رسم می کنیم. به این ترتیب به ازای هر تقاطع i چهارتا از مولدهای گروه هموتوپی تعریف می شوند که آن ها را با a_i, a'_i, b_i و b'_i نشان می دهیم. اما این مولدها مستقل نیستند و همانطور که در شکل دیده می شود به شکل زیر به هم مرتبط اند:

$$a_i = a'_i, \quad a_i b_i a_i^{-1} = b'_i \quad (5)$$

درک رابطه سمت چپ خیلی آسان است، اما برای رابطه سمت راست، خواننده یا باید قوه تخیل خود را به کار بگیرد یا یک آزمایش با دو قطعه چوب و یک تکه نخ انجام دهد. به این ترتیب گروه هموتوپی گره با مولدهایش و رابطه هایش تعیین می شود.



شکل ۳: مولدهای گروه هموتوبی برای گره ها. در هر تقاطع چهار مولد تعریف می شود ولی این مولدها با هم رابطه دارند.

■ **تمرین:** نشان دهید که گروه هموتوبی گره بدیهی همان گروه \mathbb{Z} یعنی گروه اعداد صحیح است.

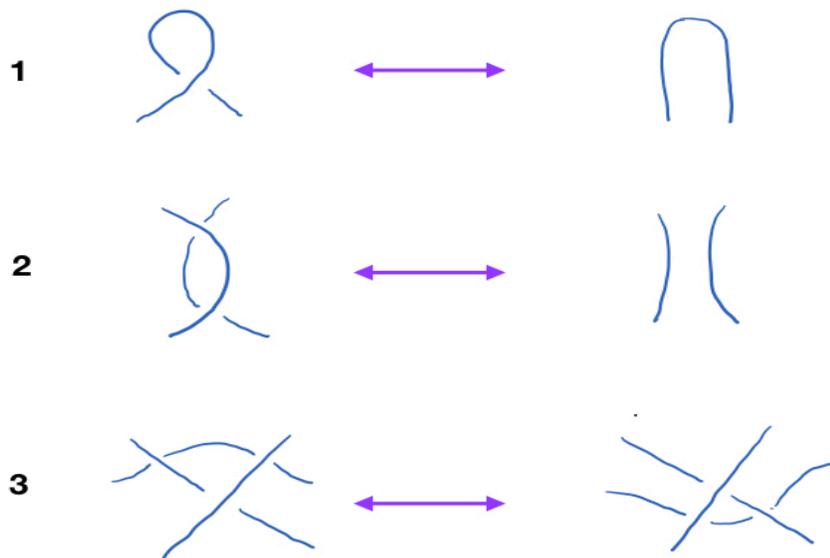
■ **تمرین:** گروه هموتوبی گره سه برگی را پیدا کنید.

■ **تمرین:** یک گره در نظر بگیرید که همان گره بدیهی است ولی یک تاب خورده و به شکل حرف 8 درآمده است. گروه هموتوبی این گره را با استفاده از قواعدی که در شکل (۳) آمده است، پیدا کنید.

گروه هموتوبی شاید اولین ابزاری باشد که به کمک آن به مطالعه گره ها می رویم. ولی خود این ابزار ممکن است چندان کارایی نداشته باشد زیرا مسئله را تبدیل به شناسایی گروه هایی می کند که با مولدها و روابط شان تعریف می شوند که خود این مسئله دشوار است. بنابراین می بایست روش های دیگری را برای شناسایی کلاس های هم ارزی گره ها دنبال کرد. در طول سالیان طولانی پیشرفت های فراوانی در این راستا صورت گرفته است. یکی از اولین پیشرفت ها توسط رایدمایستر^{۲۲} در قضیه زیر صورت بندی شده است.

■ **قضیه رایدمایستر:** دو گره با هم معادل اند اگر و فقط اگر تصویرهای آن ها را بتوان با تعداد محدودی از حرکت های سه گانه ای که در شکل ۴ نشان داده شده به یکدیگر تبدیل کرد.

^{۲۲}Reidmeister



شکل ۴: حرکت های سه گانه رایدمایستر

همانطور که در بخش های پیشین شرح دادیم، مثل هر جای دیگری در توپولوژی، در نظریه گره مفهوم نوردای توپولوژیک اهمیت اساسی دارد. فرض کنید که K یک گره باشد. اگر بتوانیم به این گره یک کمیت مشخص مثل I نسبت دهیم و آن را $I(K)$ بنامیم به طوری که هرگاه K و K' معادل باشند داشته باشیم

$$I(K) = I(K')$$

آنگاه $I(K)$ را یک نوردای گره می نامیم. به عبارت دیگر $I(K)$ کمیتی است که تحت تغییرات پیوسته گره تغییر نمی کند. فایده هر نوردای توپولوژیک این است که با محاسبه آن بلافاصله می فهمیم که آیا دو گره با هم معادل هستند یا خیر. دقت کنید که اگر بفهمیم که $I(K) = I(K')$ معنایش این نیست که این دو گره با هم معادل هستند. زیرا تعریف نوردای توپولوژیک یک طرفه است به این معنا که اگر نوردای توپولوژیک برای دو گره یکسان نباشد می توان بلافاصله نتیجه گرفت که این دو گره معادل نیستند. ممکن است که دو گره متفاوت نوردای یکسانی داشته باشند. این به این معناست که نوردای مزبور یک نوردای قوی نیست. به همین دلیل است که دائما تلاش می شود تا نورداهای جدیدتر و قوی تر تعریف شوند که البته کار ساده ای نیست.

۴ گروه گیسو و رابطه آن با ناوردهای گره ها

یکی از پیشرفت های مهم ارتباطی است که بین نظریه گره و گروه گیسو پیدا شده است. در این بخش گروه گیسو را معرفی می کنیم و سپس به این ارتباط اشاره می کنیم و نشان می دهیم که چگونه این ارتباط به ساختن ناوردهای جدید از گره ها می انجامد. گروه گیسو^{۲۳} یک گروه نامتناهی است که می توان آن را تعمیمی از گروه جایگشت دانست. در یک صفحه n نقطه در نظر بگیرید. در بالای این صفحه نیز عین همین صفحه را تصور کنید. منحنی هایی را تصور کنید که از نقاط صفحه پایینی به نقاط صفحه بالایی می روند. این منحنی ها می توانند خم شوند، دور هم بپیچند، و تاب بخورند ولی نمی توانند یک دیگر یا خود را قطع کنند. هر دسته از این منحنی ها یک عضو از گروه گیسوی n تایی را تشکیل می دهند^{۲۴} یعنی

$$\gamma \in B_n, \quad \gamma : \mathbb{R}^2 \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times [0, 1], \quad \gamma(t) = \{\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t)\} \quad (۶)$$

که در آن

$$\gamma_i(0) = p_i, \quad \gamma_i(1) = p_j \quad (۷)$$

یعنی منحنی γ_i نقطه p_i در صفحه پایین را به نقطه p_j در صفحه بالایی وصل می کند. البته به طور دقیق تر باید بگوییم که γ شکل دقیق این منحنی ها نیست بلکه کلاس توپولوژیک آنهاست به این معنا که اگر γ و γ' دو دسته منحنی باشند که بتوانند بدون پاره شدن به یکدیگر تبدیل شوند آنها را یکی می گیریم و کلاس هم ارزی آنها یک عضو از گروه گیسو را تشکیل می دهد. ضرب در این گروه به معنای پشت سر هم قرار گرفتن منحنی ها از پایین به بالا است.

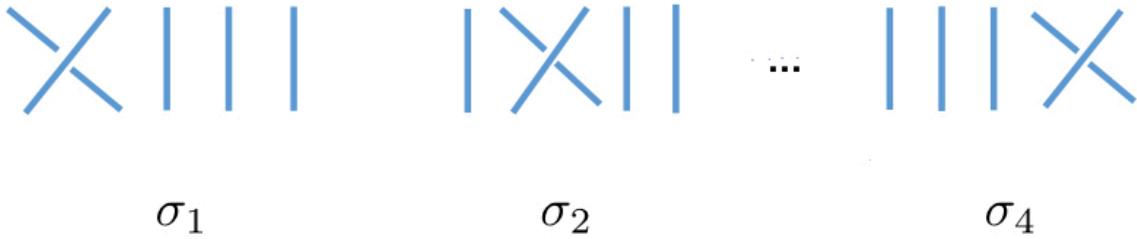
■ **تمرین:** در کلاس ضرب دو عضو گروه گیسو و وارون یک عضو تعریف شده اند. این تعاریف را به صورت دقیق ریاضی بنویسید.

گروه گیسو دارای $n - 1$ مولد است که آنها را با σ_1 تا σ_{n-1} نشان می دهیم. این مولدها در شکل (۴) نشان داده شده اند. این مولدها در روابط زیر صدق می کنند.

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{if} \quad |i - j| > 1 \quad (۸)$$

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad (۹)$$

Braid Group^{۲۳}
Braid Group on n-strands^{۲۴}



شکل ۵: مولدهای گروه گیسو

■ **تمرین:** در گروه B_n شکل گیسوهای زیر را رسم کنید:

$$\begin{aligned} \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1}, & \quad \sigma_{n-1} \sigma_{n-2} \cdots \sigma_1. \\ \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \cdots \sigma_{n-1}^{-1}, & \quad \sigma_{n-1}^{-1} \sigma_{n-2}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}. \end{aligned}$$

■ **تمرین:** در گروه B_n شکل گیسوهای زیر را رسم کنید:

$$\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1}, \quad \sigma_{n-1} \sigma_{n-2} \cdots \sigma_1.$$

■ **تمرین:** گروه گیسویی که تا کنون تعریف کرده ایم روی فضای $R^2 \times [0, 1]$ استوار بوده است، به این معنا که تمام منحنی‌ها از صفحه دو بعدی $R^2 \times \{0\}$ شروع شده و به یک صفحه دو بعدی $R^2 \times \{1\}$ به موازات آن ختم می‌شوند. حال تصور کنید که به جای صفحه دو بعدی $R^2 \times \{0\}$ کره دو بعدی قرار دهیم یعنی منحنی‌ها در فضای $S^2 \times \{0\}$ تعریف شوند. به عبارت دیگر منحنی‌ها از کره دو بعدی $S^2 \times \{0\}$ شروع شده و به کره دو بعدی $S^2 \times \{1\}$ ختم می‌شوند. تحت این شرایط روابط بین مولدهای گروه گیسو تغییر می‌کنند. در واقع یک رابطه جدید به روابط قبلی اضافه می‌شوند. این رابطه را پیدا کنید.

می‌توان بستار یک عنصر گروه گیسو γ را مطابق شکل ۶ تعریف کرد به این معنا که هرکدام از نقاط بالایی را توسط یک منحنی که از دوردست‌ها می‌گذرد به نقطه متناظر آن در پایین وصل کرد. آنچه که بدست می‌آید یک گره است. سوال این است که آیا هر گرهی به این صورت بدست می‌آید. پاسخ این سوال مثبت است و یکی از نقاط عطف در مطالعات مربوط به نظریه گره است. در واقع ثابت شده است که هر گرهی حتما بستار یک گیسو است. ممکن است که گیسوهای متفاوت بستارهای یکسان داشته باشند. بازهم یک قضیه مهم پاسخ این سوال را روشن می‌کند. هرگاه یک گیسو را با b و بستار آن را با $Cl(b)$ نشان دهیم این قضیه بیان می‌کند که بستار دو گیسوی b و b' تنها در صورتی گره‌های یکسان خواهد بود که یکی از دو شرط زیر برآورده شوند:

^{۲۵}Closure of a braid

الف:

$$Cl(b) \sim Cl(b') \quad \text{if} \quad b = \alpha\beta \quad \text{and} \quad b' = \beta\alpha \quad (10)$$

ب:

$$Cl(b) \sim Cl(b') \quad \text{if} \quad b' = b\sigma_n^{\pm 1}. \quad (11)$$

شکل ۷ محتوی این قضیه را بیان می کند. از روی این شکل می توان ایده کلی پشت این قضیه را دریافت.

این قضیه در ضمن راه تعریف ناوردهای جدیدی برای گره ها را هموار می کند. یک راه این است که نمایشی از گروه گیسو پیدا کنیم و سپس با تعریف یک رد مناسب روی این نمایش به یک ناوردای مناسب برای گره ها برسیم. ایده اصلی این راه هم ارتباطی است که بین بستار یک گیسو به عنوان یک مفهوم هندسی و بستار نمایش ماتریسی آن به عنوان یک مفهوم جبری وجود دارد. برای آنکه نمایشی از گروه گیسو پیدا کنیم می بایست به هر کدام از مولد های گروه گیسو مثل σ_i یک ماتریس در یک فضای برداری مثل

$$D(\sigma_i) \equiv B_i$$

نسبت دهیم که در همان روابط گروه گیسو صدق کنند. به همان صورت که σ_i مربوط به دو نقطه مجاور هم است، B_i هم عملگری است که روی دو فضای برداری مجاور در ضرب تانسوری n تایی از یک فضای برداری مثل V عمل می کند، یعنی

$$B_i : V \otimes V \cdots V \otimes V \cdots V \otimes V \longrightarrow V \otimes V \cdots V \otimes V \cdots V \otimes V,$$

که البته B_i فقط روی آن دو فضایی عمل می کند که در موقعیت $(i, i+1)$ قرار گرفته اند. بنابراین می خواهیم که عملگرهای B_i هم در روابط زیر صدق کنند:

$$\begin{aligned} B_i B_{i+1} B_i &= B_{i+1} B_i B_{i+1} \\ B_i B_j &= B_j B_i \quad |i-j| \geq 2. \end{aligned} \quad (12)$$

برای آنکه چنین ماتریسی هایی را پیدا کنیم یک راه این است که ماتریسی مثل

$$B : V \otimes V \longrightarrow V \otimes B$$

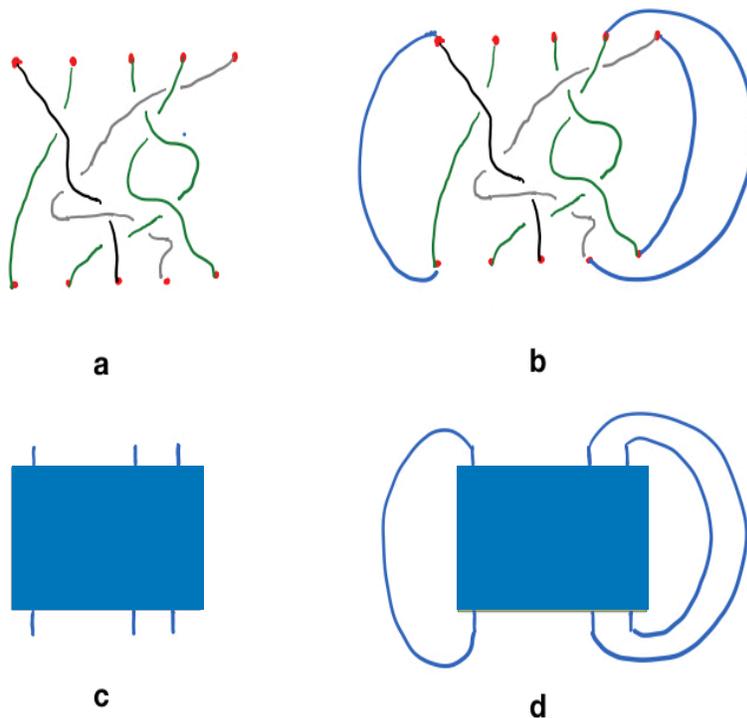
پیدا کنیم که در رابطه زیر صدق کند

$$(B \otimes I)(I \otimes B)(B \otimes I) = (I \otimes B)(B \otimes I)(I \otimes B) \quad (13)$$

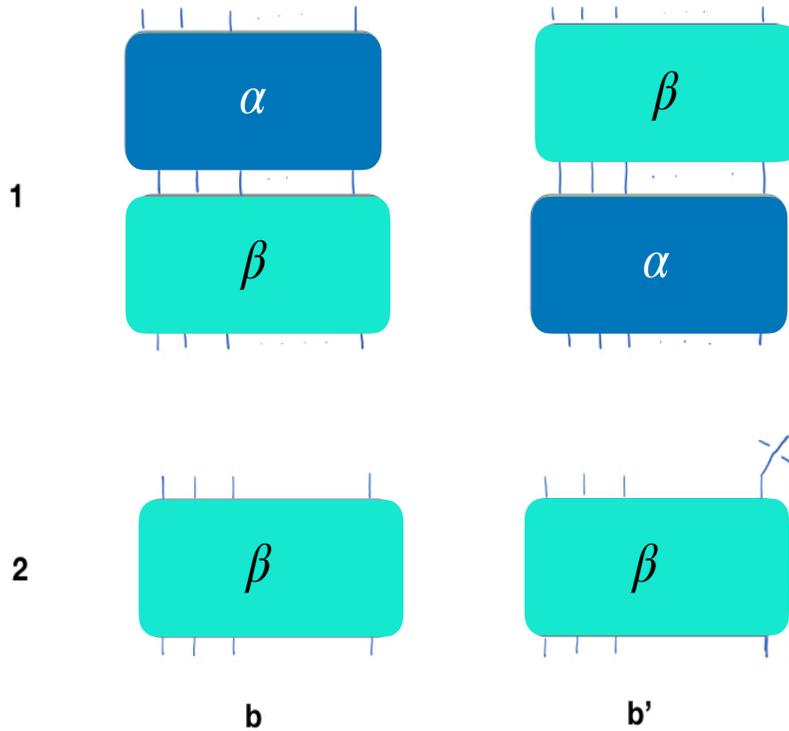
و قرار دهیم:

$$B_i := I \otimes I \otimes \cdots \otimes I \otimes B \otimes I \cdots \otimes I \otimes I. \quad (14)$$

خواننده می تواند براحتی تحقیق کند که ماتریس های فوق نمایشی از گروه گیسو را تشکیل می دهند.



شکل ۶: بستار یک گیسو



شکل ۷: بستار دو گیسو با هم معادل اند اگر و فقط اگر آن دو گیسو به یکی از دو شیوه نشان داده شده در این شکل با هم رابطه داشته باشند.

چنانچه یک نمایش از گروه گیسو یافته شود قدم بعدی این است که بتوان ردی روی این نمایش چنان تعریف کرد که در خاصیت های نشان داده شده در رابطه های (۱۰) و (۱۱) صدق کند. می توان به این ترتیب یک ناوردای گره ساخت. ایده کلی این است: گره K بستار یک گیسوی b است. یعنی $K = Cl(b)$. در این صورت رد مارکوف به عنوان یک ناوردای گره $T(K)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$T(K) = Tr(Cl(b)) \quad (15)$$

این رد یعنی Tr می بایست دارای چنان خاصیتی باشد که شرط های (۱۰) و (۱۱) صدق کند. این نوع بخصوص از رد را نخستین بار تورایف^{۲۶} تعریف کرده و توانسته ناوردهای گره را تعریف کند.

۵ جبر تمپرلی- لیب و رابطه آن با گروه گیسو

■ تعریف: جبر تمپرلی لیب^{۲۷} یا $T_n(d)$ با مولدهای $\{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\}$ و روابط زیر تعریف می شود:

$$\begin{aligned} e_i^2 &= de_i & \forall i \\ e_i e_j &= e_j e_i & |i - j| > 1 \\ e_i e_{i \pm 1} e_i &= e_i. \end{aligned} \quad (۱۶)$$

یکی از دلایل اهمیت این جبر رابطه ای است که با گروه گیسو دارد. در واقع هرگاه عناصر زیر را تعریف کنیم:

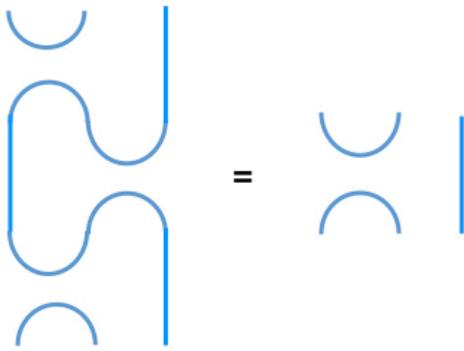
$$\sigma_i = tI + t^{-1}e_i, \quad (۱۷)$$

و قرار دهیم

$$d = -(t^2 + t^{-2}) \quad (۱۸)$$

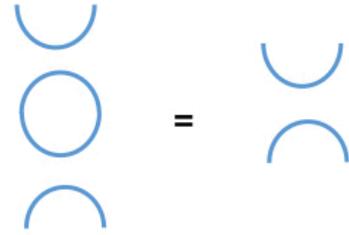
با کمی محاسبه خواهیم دید که σ_i ها در روابط گروه گیسو صدق می کنند. این ارتباط از یک طرف یافتن نمایش های ماتریسی گروه گیسو را ساده تر می کند (زیرا به هر حال جبر تمپرلی-لیب، جبر ساده تری است). از طرف دیگر این رابطه جبری تبدیل به یک رابطه توپولوژیک بین گروه گیسو و کلاس های هم ارزی جدیدی بین منحنی ها می شود. برای این که این رابطه جدید را توضیح دهیم باز هم یک مجموعه n تایی از نقاط را در صفحه دوبعدی و یک نسخه دیگر از همین صفحه با همین نقاط درست در بالای آن در نظر بگیرید. سپس مطابق شکل (۸) یک مجموعه منحنی از نقاط پایینی به نقاط بالایی رسم کنید. این منحنی ها یکدیگر را قطع نمی کنند و دور یک دیگر نیز تاب نمی خورند. این منحنی ها می توانند از یک نقطه در صفحه پایینی شروع شده و به نقطه دیگری از همان صفحه پایینی وصل شوند. در همه حال نیز منظور ما از منحنی ها کلاس هم ارزی آنهاست به این معنا که یک منحنی و تغییرشکل پیوسته آن را یکی در نظر می گیریم. حال خواننده براحتی می تواند نشان دهد که مولدهای جبر تمپرلی - لیب متناظر با منحنی های نشان داده شده در شکل (۸) هستند.

^{۲۷}Temperly-Lieb



$$e_n e_{n+1} e_n = e_n$$

a



$$e_n^2 = d e_n$$

b

شکل ۹: روابط بین مولدهای جبر تمپرلی-لیب یک معنای توپولوژیک دارد.

■ **تمرین:** منحنی های متناظر با عناصر زیر از جبر تمپرلی-لیب $T_4(d)$ را رسم کنید:

$$e_1 e_2 e_1 e_2,$$

$$e_1 e_3 e_1 e_2 e_3,$$

$$e_1 e_2 e_3 e_2 e_4 e_2 e_1.$$

(۱۹)

■ **تمرین:** ماتریس زیر را در نظر بگیرید و نشان دهید که در معادله گروه گیسو صدق می کند.

$$B = \begin{pmatrix} q & & & \\ & p^{-1} & q - q^{-1} & \\ & & p & \\ & & & q \end{pmatrix} \quad (20)$$

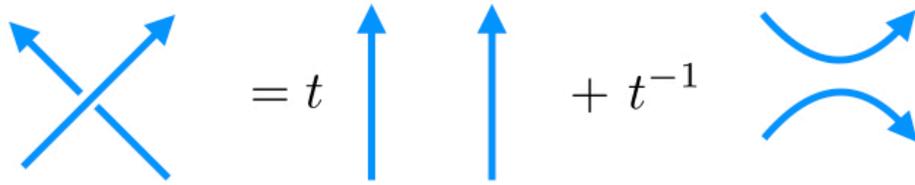
سپس از روی آن یک جواب برای جبر تمپرلی-لیب پیدا کنید. واقعا تست کنید که جوابی که پیدا کرده اید در روابط جبر تمپرلی - لیب صدق می کند. مقدار d را برای جبر تمپرلی - لیب پیدا کنید.

۶ براکت کافمن و ناوردهای گره

رابطه ای که بین جبر تمپرلی-لیب و گروه گیسو پیدا کردیم به ما کمک می کند که به روش دیگری برای پیدا کردن ناوردهای گره ها تلاش کنیم. این کار نخست توسط لوئیس کافمن^{۲۸} ریاضیدان امریکایی انجام شده است و به چیزی که برای گره بدست می آید اصطلاحا براکت کافمن^{۲۹} گفته می شود.

اگر روی یک گره جهتی اختیاری را در نظر بگیریم و به تصویر مسطح این گره فکر کنیم آن را به صورت مجموعه ای از تقاطع ها^{۳۰} خواهیم دید که در آن خط سمت چپ یا از رو و یا از زیر خط سمت راست رد شده است. هر کدام از این تقاطع ها را می توانیم به صورت یک گیسوی بسیار ساده و کوچک در نظر بگیریم. اگر بقیه گره را به کلی فراموش کنیم و فقط به این گیسوی کوچک فکر کنیم می توانیم از رابطه (۱۰) استفاده کنیم و این گیسو را باز کنیم. این باز کردن به صورت دقیق تر به این معناست که هر نمایی که برای گیسو ها (یا تقاطع ها) در نظر بگیریم، نمایش ماتریسی این گره به صورت نمایش ماتریسی دو عضو دیگر نوشته می شود. از آنجا که این نمایش ماتریسی قرار است که نهایتا منجر به یک ناوردهای توپولوژیک برای گره شود، این رابطه رابطه ای خواهد شد بین ناوردهای دو شکل ساده تری که دیگر دارای آن تقاطع بخصوص نیستند. وقتی که این کار را یک به یک برای همه تقاطع ها انجام دهیم سرانجام به رابطه ای بین ناوردهای گره اولیه و مجموعه ای از گره های

^{۲۸}Luis Kauffman
^{۲۹}Kauffman Bracket
^{۳۰}Crossing



شکل ۱۰: قواعد کافمن برای بازگردن تقاطع ها و بدست آوردن ناوردای یک گره: وقتی که این کار را برای همه تقاطع ها یکی پس از دیگری انجام دهیم نهایتا به یک چندجمله ای برحسب t و t^{-1} می رسیم.

قاعده اول: به هر گره ساده باز مثل یک دایره عدد $d = -(t^2 + t^{-2})$ نسبت داده می شود. بنابراین ناوردای یک گره کاملا بدیهی برابر است با d .

قاعده دوم: برای قاعده دوم احتیاج به یک مفهوم دیگر داریم. اگر قواعد کافمن را برای گره نشان داده شده در شکل (۱۱) به کار ببریم چندجمله ای که بدست می آوریم برابر است با $-t^3 d$. در نگاه اول این یک تناقض به نظر می رسد زیرا که گره نشان داده شده بدیهی است. اما نکته این است که این گره یک تاب 3 دارد و فاکتور t^{-3} به خاطر آن تاب پدید آمده است. اگر گره از یک نخ کاملا نازک پدید آمده باشد تاب قابل شناسایی نیست و بی معناست اما اگر گره از یک نوار با یک ضخامت محدود (مثل یک کمر بند) درست شده باشد آنگاه تاب بامعنا و قابل تعریف است. بنابراین درست تر این است که بگوییم ناوردای کافمن به شکل گفته شده در این قواعد نه ناوردای یک گره، بلکه ناوردای یک نوار را نشان می دهند. نکته جالب این است که اگر یک نوار یا کمر بند را در جهت دیگری تاب دهید (مثل آنچه که در شکل (۱۱) نشان داده شده) آنگاه نوار بدست می آید که از نظر توپولوژیک با نوار تاب داده شده در جهت عکس فرق دارد. این کار را با یک کمر بند امتحان کنید.

^{۳۱}Twiste, or Writhe

خواهید دید که نمی توانید تاب یک کمر بند را بدون پاره کردن آن برعکس کنید. ناوردای کافمن این تفاوت را به خوبی نشان می دهد.

■ **تمرین:** برای نوارهای نشان داده شده در شکل (۱۳) ناوردای کافمن را حساب کنید و نشان دهید که ناوردای کافمن این دو نوار را از هم تمیز می دهد.

چگونه می توانیم از این ناوردها استفاده کنیم و ناوردهای گره (یعنی منحنی بدون ضخامت) را پیدا کنیم؟ پاسخ این سوال را می توانیم با توجه به تمرین قبلی پیدا کنیم. در واقع همانطور که در این تمرین می بینیم برای تاب منفی (برای تعریف به چند سطر بعد نگاه کنید) یک ضریب $-t^{-3}$ و برای تاب مثبت یک ضریب t^3 در d یعنی ناوردای گره بدون ضخامت ضرب شده است. پس اگر ناوردای کافمن برای یک نوار را با $\langle K \rangle$ نشان دهیم کافی است که ناوردای همان گره را به صورت زیر نشان دهیم: (یعنی کاری کنیم که فاکتورهایی را که به خاطر تاب ها پدیدآمده اند حذف کنیم):

$$J_K(t) := (-t^3)^{W(K)} \langle K \rangle, \quad (21)$$

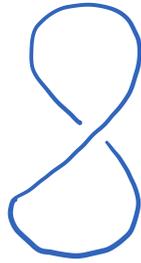
که در آن $W(K)$ عدد پیچش یا عدد تاب 32 آن نوار است. این ناوردها همان چند جمله ای مشهور جونز 33 است که آن را از طریق دیگری بدست آورده و برای آن مدال فیلدز برده است. دلیل اهمیت ناوردای جونز این است که ثابت شده است واقعا یک ناوردای قوی برای تمیز دادن گره هاست، یعنی گره هایی را که تا کنون ناوردهای دیگر نمی توانستند از یکدیگر تمیز دهند، از یکدیگر تمیز می دهد. اما عدد پیچش چگونه تعریف می شود؟

■ **تعریف:** عدد پیچش یک تقاطع به صورت نشان داده در شکل (۱۲) نشان داده می شود. عدد پیچش یک گره یا نوار مجموع جبری تمام عددهای پیچش برای همه تقاطع ها است.

■ **تمرین:** چند جمله ای جونز را برای گره سه برگی و تصویر آینه ای آن حساب کنید.

چندجمله ای جونز اگر چه براحتی قابل تعریف است ولی براحتی قابل محاسبه نیست. دلیل اش را براحتی با مراجعه به قواعد کافمن می توان فهمید. وقتی که قواعد کافمن را برای گرهی که دارای n تا تقاطع است به کار می بریم در طرف راست نهایتا 2^n تا گره بدیهی بوجود می آید که می بایست ضرایب مربوط به آن ها را جمع کنیم تا چندجمله ای نهایی بدست بیاید. بنابراین حجم محاسبه ای که می بایست انجام شود نسبت به تعداد تقاطع ها به طور نمایی بزرگ می شود.

Write number³²
Jones Polynomial³³



(a)



(b)

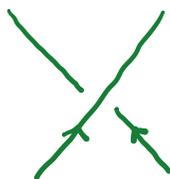
شکل ۱۱: استفاده از قواعد کافمن برای این دو گره منجر به دو مقدار متفاوت می شود که نشان می دهد این دو شکل با یک گره کاملاً بدیهی فرق دارند.

۷ رایانش توپولوژیک

رایانش کوانتومی توپولوژیک^{۳۴} چیست؟ چه مزیتی دارد؟ چگونه انجام می شود؟ این ها سوالاتی هستند که سعی می کنیم پاسخ آنها را در این بخش و بخش های آینده پیدا کنیم. علاوه بر این ها می توانیم بپرسیم که رایانش کوانتومی توپولوژیک چه ربطی به مسائل کاملاً ریاضی ای که تا کنون طرح کرده ایم دارد؟ آیا رایانش کوانتومی توپولوژیک به یافتن ناوردهای جدید برای گره ها منجر می شود؟ آیا همین ناوردهای تعریف شده را به شیوه موثرتری محاسبه می کند؟ سعی می کنیم به اجمال این سوال ها را نیز بررسی کنیم.

نخست به توصیف انگیزه های کلی برای رایانش کوانتومی توپولوژیک می پردازیم. می دانیم که عنصر اساسی رایانش کلاسیک را بیت کلاسیک تشکیل می دهد. بیت کلاسیک چیزی است که می تواند در دو وضعیت مختلف قرار گیرد و این وضعیت را می توانیم با صفر و یک متناظر کنیم. این بیت یک موجود ماکروسکوپی و بس ذره ای است و شامل میلیون ها ذره میکروسکوپی است. حالت جمعی این ذرات مشخص می کند که آیا بیت در حالت صفر قرار گرفته است یا در حالت یک. به همین دلیل اگر حالت یکی از ذرات تغییر کند و به کلی عوض شود در حالت جمعی ذرات تغییر قابل ملاحظه ای پیش نمی آید. به عنوان مثال می توانید بیت کلاسیک را به صورت حالت انبوهی از گشتاورهای مغناطیسی ذرات در نظر بگیرید که مجموعاً یک گشتاور مغناطیسی کل تولید می کنند. اندازه این گشتاور کل که ناشی از یک نوع نظم آنهم نظم

^{۳۴}Topological Quantum Computation



$$w = 1$$

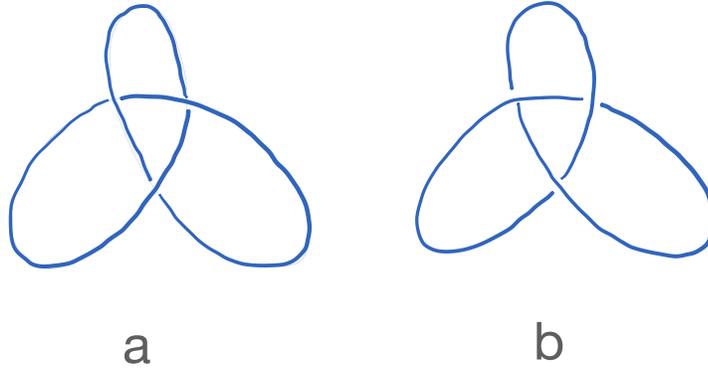


$$w = -1$$

شکل ۱۲: تعریف عدد پیچش برای یک تقاطع. دقت کنید که این عدد ربطی به این که از چه زاویه ای به تقاطع نگاه می کنید ندارد.

موضعی^{۳۵} است تعیین می کند که بیت صفر است یا یک. منظور از نظم موضعی نیز این است که می توان آن را با یک مشاهده پذیر موضعی تمیز داد. به عنوان در شکل (۱۴) براحتی می توان با مشاهده یک ناحیه کوچک تشخیص داد که آیا در فاز بی نظم هستیم یا فاز منظم و اگر در فاز منظم هستیم این فاز، کدام یک از فازهاست. نکته مهم این است که دو وضعیت یک بیت کلاسیک متناظر با دو وضعیت منظم هستند که با نظم موضعی از یکدیگر تمیز داده می شوند. نکته مهم در بیت کلاسیک این است که نسبت به خطاهایی که در تک تک اتم ها و ذرات ایجاد می شود مقاوم است زیرا یک بودن یا صفر بودن بیت کلاسیک نه ناشی از وضعیت یک اتم منفرد بلکه ناشی از یک حالت جمعی میلیون ها اتم است که در یک حالت منظم قرار گرفته اند. شکل (۱۴) این وضعیت را به خوبی نشان می دهد. از طرف دیگر در درسهای گذشته با کیوبیت و شکنندگی فوق العاده آن آشنا شده ایم. اگر چه با کدهای تصحیح خطا می توانیم با خطاهای کوانتومی مقابله کنیم ولی یک راه خیلی بهتر ممکن است این باشد که همین وضعیت های بیت کلاسیک را که ناشی از یک نظم جمعی میلیون ها اتم است در یک حالت برهم نهی قرار دهیم. هرگاه این کار را بکنیم یک کیوبیت درست کرده ایم. این کیوبیت ممکن است مقاوم بودن در مقابل خطا را به طور ذاتی و بدون نیاز به مکانیزم های تصحیح خطا دارا باشد. اما در این جا یک نکته خیلی مهم وجود دارد. این که این دو وضعیت صفر و یک به صورت موضعی از هم قابل تمیز هستند این کیوبیت را در مقابل خطاهای موضعی بشدت آسیب پذیر می کند. برای فهم بهتر این موضوع به مثال زیر توجه کنیم. فرض کنید که این ایده را بخواهیم با ترکیب خطی دو وضعیت یک بیت کلاسیک که ناشی از منظم شدن همه اتم ها یا اسپین ها (به صورت بالا یا پایین) عملی کنیم. به عنوان مثال حالتی از این کیوبیت را به صورت زیر در نظر بگیرید:

^{۳۵}Local Order



شکل ۱۳: گره سه برگه و تصویر آینه ای آن.

$$|GHZ_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|000 \dots 00\rangle + |111 \dots 11\rangle) \quad (22)$$

حال فرض کنید که یک اندازه گیری، یک اختلال محیطی، روی اتم اول اتفاق می افتد. این اندازه گیری اتم اول را یا به حالت 0 یا به حالت 1 می برد و به همراه آن کل حالت به یکی از دو حالت $|000 \dots 00\rangle$ یا $|111 \dots 11\rangle$ تصویر می شود. این دو حالت با حالت اولیه تفاوت خیلی زیادی دارند و به این ترتیب اثر نوفه محیطی روی یک اتم به کلی برهم نهی کیوبیت را از بین برده و آن را دچار وادوسی کرده است.

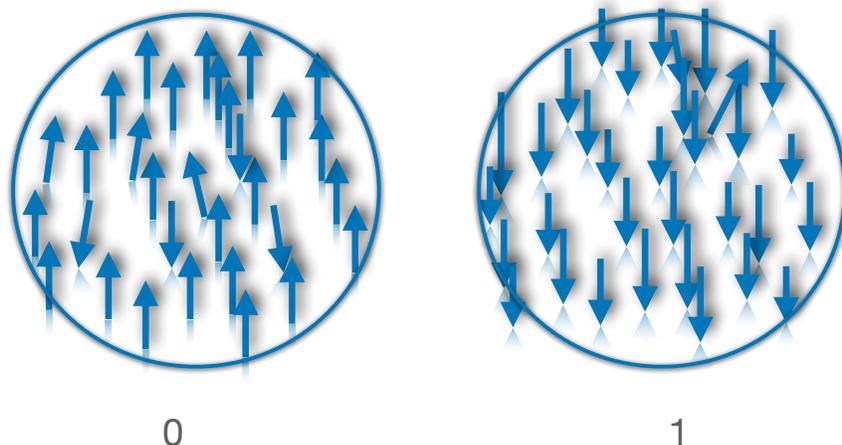
اکنون حالت زیر را در نظر بگیرید:

$$|W_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} (|100 \dots 00\rangle + |010 \dots 00\rangle + \dots + |000 \dots 01\rangle) \quad (23)$$

این حالت از برهم نهی حالت هایی تشکیل شده که تقریباً به صورت موضعی از قابل تمیز نیستند. حال اگر همان اتفاقی که در بالا برای اتم اول افتاد برای اتم اول در این جا بیفتد با احتمال $\frac{1}{N}$ این حالت به $|000 \dots 00\rangle$ تصویر شده و با احتمال $\frac{N-1}{N}$ به

$$|0\rangle \otimes |W_{N-1}\rangle$$

تصویر می شود که هنوز شباهت خیلی زیادی با حالت اولیه دارد. به این ترتیب قابل تمیز بودن از نظر موضعی مرادف است با این که نوفه موضعی نیز وادوسی یک حالت را از بین ببرد. این مشاهدات ما را به این نکته رهنمون می شود که اگر بخواهیم یک کیوبیت ماکروسکوپی درست کنیم



شکل ۱۴: دو وضعیت یک بیت کلاسیک. میلیون ها ذره در یک نظم موضعی خاص وضعیت صفر و در یک نظم موضعی دیگر وضعیت یک را تعریف می کنند. اگر تعداد کمی از این ذرات از این نظم پیروی نکنند بازهم وضعیت بیت تغییری نمی کند. نظم به این دلیل موضعی نامیده می شود که می توان با مشاهده یک بخش کوچک از سیستم آن را تشخیص داد.

می بایست این کیوبیت از برهم نهی حالت هایی درست شود که از نظر موضعی از هم قابل تمیز نباشند. این مشاهده ارتباط رایانش کوانتومی توپولوژیک را با نظم توپولوژیک نشان می دهد. منظور از نظم توپولوژیک نیز نظمی است که با مشاهده گره های موضعی قابل شناسایی نیست. به طور خلاصه برای ساختن کیوبیت های توپولوژیک می بایست به چهار ویژگی زیر توجه کنیم.

■ ویژگی های کیوبیت های توپولوژیک:

الف- یک سیستم بس ذره ای که دارای حالت پایه واگن است. چنانچه تعداد این حالت های واگن برابر با 2^k باشد، می توانند به عنوان حالت های k تا کیوبیت در نظر گرفته شوند.

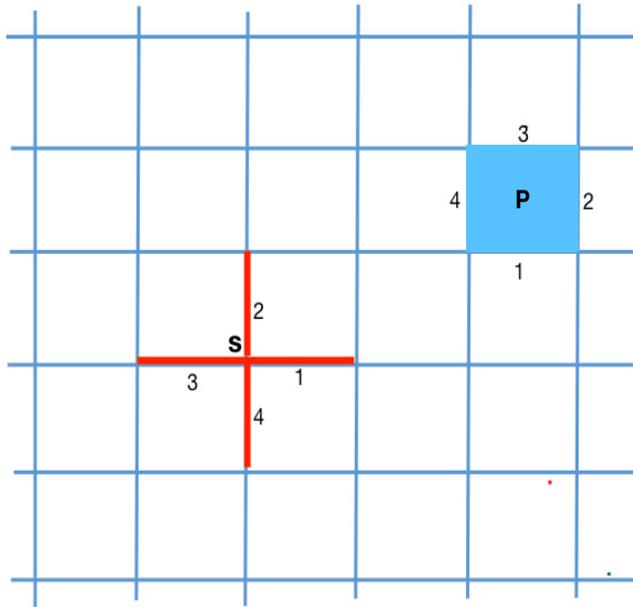
ب- این حالت های پایه می بایست با یک شکاف انرژی از حالت های برانگیخته جدا شده باشند. داشتن این شکاف انرژی برای مخلوط نشدن حالت های منطقی کیوبیت ها با دیگر حالت ها لازم است.

پ- این حالت های پایه می بایست با مشاهده پذیرهای موضعی از یکدیگر قابل تمیز نباشند.

ت- ویژگی های سه گانه فوق می بایست تحت اختلالات موضعی هامیلتونی سیستم بس ذره ای همچنان برقرار باشند.

۸ مدل کیتایف - آنیون های آبلی

مدل کیتایف 3^6 ساده ترین و شاید اولین مدلی باشد که روی یک شبکه امکان یک نظم توپولوژیک را بیان می کند. هم چنین این مدل اولین مدل بس ذره ای روی یک شبکه دوبعدی است که به صورت دقیق قابل حل است. این مدل را می توان روی هر نوع شبکه دوبعدی حتی شبکه های بی نظم نیز تعریف کرد ولی ما برای وضوح تعریف مدل روی یک شبکه مربعی را در نظر می گیریم. شبکه ای مربعی را با N راس در نظر بگیرید. چنین شبکه ای دارای $2N$ ضلع و N مربع خواهد بود. شرایط مرزی را نیز پریودیک در نظر می گیریم. روی هر ضلع یک ذره اسپین $1/2$ زندگی می کند. به این ترتیب فضای هیلبرت کل دارای بعد $dim(H) = 2^{2N}$ است.



$$A_s = X_1 X_2 X_3 X_4$$

$$B_p = Z_1 Z_2 Z_3 Z_4$$

شکل ۱۵: عملگرهای ستاره و پلاکت در مدل کیتایف. همه این عملگرها با هم جابجا می شوند.

هامیلتونی این مدل به شکل زیر تعریف می شود:

$$H_{Kitaev} := - \sum_s A_s - \sum_p B_p \quad (24)$$

Kitaev Model^{۳۶}

که در آن s نشان دهنده یک راس (star) و p نشان دهنده یک مربع یا (plaquette) است. هم چنین عملگرهای A_s و B_p به صورت زیر تعریف می شوند:

$$A_s := \prod_{i \in s} X_i, \quad B_p := \prod_{i \in p} Z_i. \quad (25)$$

در این عبارت ها

$$Z_i = \sigma_{z,i}, \quad X_i = \sigma_{x,i}$$

ماتریس های پائولی هستند و منظور از $i \in s$ تمامی اضلاعی است که از راس s می گذرند و منظور از $i \in p$ تمام اضلاعی است که پیرامون p هستند. این عملگرها دارای خاصیت های زیر هستند:

$$A_s^2 = I, \quad B_p^2 = I, \quad [A_s, B_p] = 0 \quad (26)$$

هم چنین به دلیل شرایط مرزی پریودیک دو قید زیر روی این عملگرها وجود دارد:

$$\prod_s A_s = I, \quad \prod_p B_p = I. \quad (27)$$

به این ترتیب در این مدل 2^{2N-2} عملگر مستقل وجود دارند که با یک دیگر و با هامیلتونی جابجا می شوند. می توان تمام این عملگرهای مستقل جابجاشونده را در یک پایه قطری کرد. عناصر این پایه را موقتا به شکل زیر نشان می دهیم:

$$|\{\alpha\}; \{\beta\}\rangle := |\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{N-1}; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{N-1}\rangle, \quad (28)$$

و در نتیجه

$$H|\{\alpha\}; \{\beta\}\rangle = -E_{\{\alpha\}; \{\beta\}}|\{\alpha\}; \{\beta\}\rangle, \quad (29)$$

که در آن

$$E_{\{\alpha\}; \{\beta\}} = -\sum_i \alpha_i - \sum_i \beta_i \quad (30)$$

تعداد عناصر این پایه برابر است با 2^{2N-2} که از بعد فضای هیلبرت کمتر است. می توان به α_s ها و β_p ها به عنوان بارهای موضعی این حالت نگاه کرد چرا که این اعداد ویژه مقادیرهای عملگرهای پایسته ای هستند که با هامیلتونی جابجا می شوند. این شمارش نشان می دهد که این

بارهای موضعی برای شمارش کلیه حالت های فضای هیلبرت کافی نیستند. بنابراین می بایست در جستجوی بارهای پایسته ای باشیم که بر حسب این بارهای موضعی قابل بیان نیستند و توسط توپولوژی چنبره تعیین می شوند. در واقع چنین بارهایی وجود دارند. برای شناختن این بارها به عملگرهای زیر دقت می کنیم:

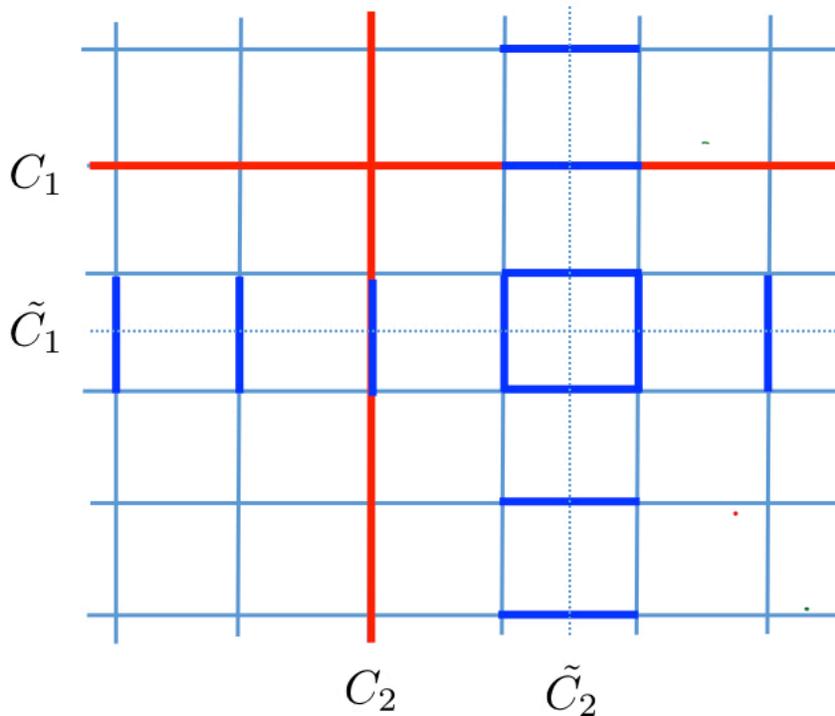
$$C_{1,z} = \prod_{j \in C_1} Z_j, \quad C_{2,z} = \prod_{j \in C_2} Z_j, \quad (31)$$

در این جا C_1 و C_2 دو منحنی در امتداد سیکل های چنبره هستند. این سیکل ها دارای این خاصیت مهم هستند که مرز یک ناحیه نیستند، به اصطلاح از نظر همولوژی این سیکل ها غیربدیهی هستند. در اینجا به یک مفهوم دیگر توپولوژیک اشاره کرده ایم که به نام همولوژی^{۳۷} شناخته می شود. البته برای بقیه بحث ما، تا وقتی که روی چنبره قرار داریم این مفهوم اهمیتی ندارد ولی دانستن اش به طور کلی بد نیست. یک منحنی را از نظر همولوژی بدیهی می گوئیم اگر مرز ناحیه ای دو بعدی از یک سطح باشد. هرگاه غیر از این باشد، آن منحنی را از نظر همولوژی غیر بدیهی می گوئیم. هرگاه یک منحنی بدیهی را قیچی کنیم، سطح به دو قسمت مشخص که درون و بیرون این منحنی هستند تقسیم می شود، ولی با بریدن یک سطح در امتداد یک منحنی که مرز جایی نیست، سطح همچنان یک پارچه باقی می ماند. به عنوان مثال همه منحنی هایی که از کنار هم قرار گرفتن پلاکت ها در یک چنبره یا هر سطح دیگری درست می شوند، از این نظر بدیهی هستند و سیکل های روی چنبره نابدیهی هستند. یک چنبره از نظر توپولوژیک دو سیکل غیر بدیهی دارد. این سیکل ها در شکل (۱۶) و (۱۷) نشان داده شده اند. از آنجا که این سیکل ها مرز یک ناحیه نیستند پس بر حسب عملگرهای پلاکت نیز قابل نوشتن نیستند با این وجود خاصیت مهم آنها این است که با همه عملگرهای راس و پلاکت و در نتیجه با هامیلتونی جابجا می شوند.

بنابراین ویژه حالت های انرژی علاوه بر ویژه مقدارهای $\{\alpha, \beta\}$ می بایست ویژه مقدار عملگرهای فوق را نیز داشته باشد. اما این کافی نیست چرا که با در دست داشتن تنها دو عملگر تعداد حالت های بدست آمده با بعد فضای هیلبرت مساوی نخواهد شد. در این مرحله متوجه می شویم که دو عملگر مشابه دیگر نیز می توانیم بسازیم. در واقع عملگرهای فوق بر حسب عملگرهای پلاکت قابل نوشتن نیستند. می توانیم فکر کنیم که چرا به پلاکت ها در این جا نقش ویژه ای داده شده و از عملگرهای راس استفاده نشده است؟ این مسئله ما را به دو عملگر مشابه دیگر می رساند:

$$\tilde{C}_{1,x} = \prod_{j \in \tilde{C}_1} X_j, \quad \tilde{C}_{2,x} = \prod_{j \in \tilde{C}_2} X_j. \quad (32)$$

هر چهار عملگر در شکل (۱۶) نشان داده شده اند. خواننده براحتی می تواند نشان دهد که این عملگرها نیز بر حسب عملگرهای راس قابل نوشتن نیستند و هم چنین می تواند نشان دهد که هر چهار عملگر $C_{1,x}$, $C_{2,x}$, $C_{1,z}$, $C_{2,z}$ با هم و با هامیلتونی جابجا می شوند. بنابراین



شکل ۱۶: به ازای هر سیکل (یعنی منحنی بسته ای که مرز جایی نیست) می توان یک عملگر C_z و یک عملگر C_x تعریف کرد.

ویژه مقدارهای هامیلتونی دارای یک درجه واگنی چهار هستند و به ترتیب زیر نشان داده می شوند:

$$H|\{\alpha\}; \{\beta\}, c_1, c_2, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2\rangle = -E_{\{\alpha\}; \{\beta\}}|\{\alpha\}; \{\beta\}, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2\rangle, \quad c_i = \tilde{c}_i = \pm 1. \quad (33)$$

به این ترتیب ویژه مقدارهای عملگرهای توپولوژیک درجه واگنی انرژی را تعیین می کنند.

حال می توانیم از خود بیرسیم که شکل صریح ویژه حالت های انرژی کدامند؟ برای این کار به ترتیب زیر عمل می کنیم: نخست حالت زیر

را تعریف می کنیم:

$$|\Omega\rangle = |+\rangle^{2N}, \quad (34)$$

که در آن $|+\rangle$ ویژه حالت عملگر x است. این حالت ویژه حالت همه عملگرهای A_s است ولی ویژه حالت عملگرهای پلاکت نیست. برای آنکه

ویژه حالتی از همه عملگرهای راس و پلاکت بسازیم حالت زیر را در نظر می گیریم:

$$|\Psi_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{|F|}} \prod_p (1 + B_p) |\Omega\rangle \quad (35)$$

■ **تمرین: الف:** نشان دهید که حالت بالا حالت پایه هامیلتونی است.

ب: این حالت را بهنجار کنید.

از آنجا که ویژه حالت های هامیلتونی می بایست واگن باشند حالت پایه نیز می بایست واگنی درجه چهار داشته باشد. این حالت ها عبارتند از:

$$|\Psi_{i,j}\rangle := C_{1,z}^i C_{2,z}^j |\Psi_{00}\rangle. \quad (36)$$

به این ترتیب می توانیم از حالت های پایه مدل کیتایف روی چنبره برای کد کردن دو کیوبیت استفاده کنیم. در واقع می توانیم کیوبیت های منطقی را به صورت زیر نشان دهیم:

$$|i,j\rangle := |\Psi_{ij}\rangle. \quad (37)$$

■ **تمرین: الف:** نشان دهید که حالت های بالا حالت پایه هامیلتونی هستند.

ب: این حالت ها را بهنجار کنید.

پ: نشان دهید که اگر عملگرهای $C_{i,z}$ را به طور پیوسته و بدون پاره کردن منحنی های مربوطه تغییر شکل دهید هیچ تغییری در حالت های بالا پدیدار نخواهند شد.

ت: نشان دهید که حالت های زیر نیز ویژه حالت های هامیلتونی هستند اگر چه حالت پایه نیستند. سپس انرژی آنها را پیدا کنید:

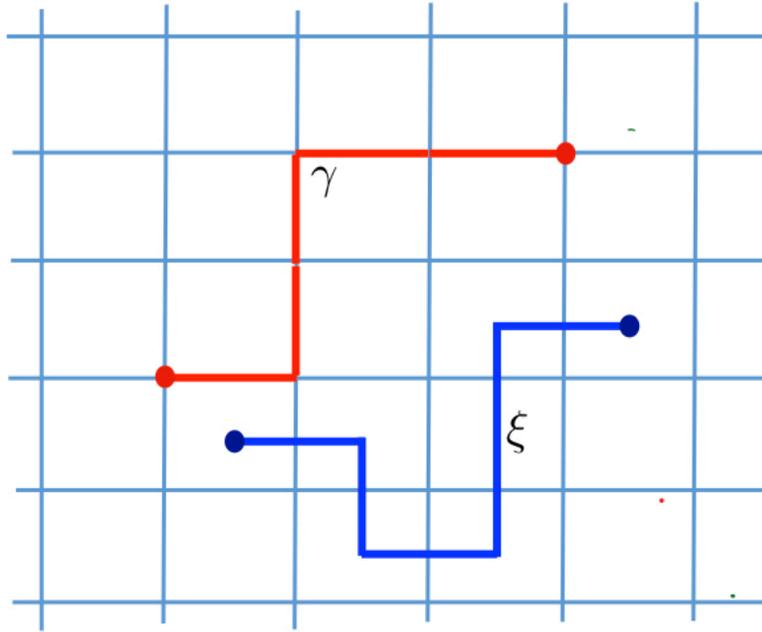
$$|\Psi_s\rangle = \frac{1}{\sqrt{|F|}} \prod_p (1 + (-1)^{s_p} B_p) |\Omega\rangle, \quad s_p = 0, 1. \quad (38)$$

این حالت ها را نیز بهنجار کنید.

■ **تمرین:** عملگرهای منطقی زیر را تعریف می کنیم:

$$Z_1 := \tilde{C}_{x,1}, \quad Z_2 := \tilde{C}_{x,2}, \quad X_1 := C_{z,1}, \quad X_2 := C_{z,2}. \quad (39)$$

نشان دهید که این عملگرها روی کیوبیت های منطقی $|i,j\rangle$ واقعا مثل عملگرهای منطقی پاولی عمل می کنند.



شکل ۱۸: هر منحنی باز دو انیون تولید می کند. بسته به این که منحنی باز از عملگرهای z یا x ساخته شده باشد، انیون ایجاد شده از نوع e یا از نوع m است. انیون های e در راس ها و انیون های m در پلاکت ها زندگی می کنند.

مدل کیتایف را روشن می کند. یک منحنی باز مثل آن که در شکل (۱۸) نشان داده شده در نظر بگیرید. در امتداد این منحنی عملگرهای z را اعمال کنید. هرگاه منحنی باز را با γ نشان دهیم عملگر مربوطه عبارت است از:

$$C_\gamma = \prod_{i \in \gamma} Z_i. \quad (41)$$

■ **تمرین: الف:** حالت $\langle C_\gamma | \Psi_{00} \rangle$ را در نظر بگیرید. نشان دهید که انرژی این حالت برابر است با $E_0 + 4$ که در آن انرژی حالت پایه است.

ب: نشان دهید که اگر منحنی γ را تغییر شکل دهید ولی دو سر آن را ثابت نگاه دارید حالتی که بدست می آید هیچ تفاوتی با حالت قبلی نمی کند. بنابراین حالت بدست آمده تنها به دو سر منحنی بستگی دارد و نه به شکل خود منحنی. به ازای هر سر منحنی نیز انرژی به مقدار ۲ واحد بالا رفته است. می توانیم بگوییم که هر منحنی باز به این صورت به مثابه وجود دو شبه ذره است که هر شبه ذره نیز ۲ واحد انرژی دارد. این شبه ذره ها را با e نشان می دهیم. دقت کنید که هر شبه ذره در یک راس زندگی می کند. به دلیلی که در ادامه خواهیم دید این شبه ذرات را آنیون های از نوع e می خوانیم.

شبه ذرات e تنها یک نوع از برانگیختگی های این سیستم را نشان می دهد. نوع دیگری از شبه ذرات نیز در این مدل وجود دارد. برای دیدن

این شبه ذرات یک منحنی باز مثل ξ در شکل (۱۸) را در نظر بگیرید. در امتداد این منحنی عملگرهای x را اعمال کنید:

$$\tilde{C}_\xi = \prod_{i \in \xi} X_i. \quad (42)$$

■ **تمرین: الف:** حالت $\langle \tilde{C}_\xi | \Psi_{00} \rangle$ را در نظر بگیرید. نشان دهید که انرژی این حالت برابر است با $E_0 + 4$ که در آن E_0 انرژی حالت پایه است.

ب: نشان دهید که اگر منحنی ξ را تغییر شکل دهید ولی دو سر آن را ثابت نگاه دارید حالتی که بدست می آید هیچ تفاوتی با حالت قبلی نمی کند. بنابراین حالت بدست آمده تنها به دو سر منحنی بستگی دارد و نه به شکل خود منحنی. به ازای هر سر منحنی نیز انرژی به مقدار ۲ واحد بالا رفته است. می توانیم بگوییم که هر منحنی باز به این صورت به مثابه وجود دو شبه ذره است که هر شبه ذره نیز ۲ واحد انرژی دارد. این شبه ذره ها را با m نشان می دهیم. دقت کنید که هر شبه ذره در یک پلاکت زندگی می کند. به دلیلی که در ادامه خواهیم دید این شبه ذرات را آنیون های از نوع m می خوانیم.

اکنون وقت آن رسیده که از خود بپرسیم چرا به این ذرات آنیون می گوییم. پاسخ این سوال را می توانیم با مطالعه خواص تابع موج وقتی که این ذرات را جابجا می کنیم پیدا کنیم. یکی از حالت های پایه را در نظر بگیرید. این حالت را با $|\psi\rangle$ نشان می دهیم. با اعمال یک عملگر C_γ یک حالت برانگیخته درست می شود که دارای دو شبه ذره e در نقاط a و b یعنی در نقاط ابتدا و انتهای منحنی γ است. این حالت را با $|\psi(a, b)\rangle$ نشان می دهیم. بنابراین داریم:

$$|\psi(a, b)\rangle := C_\gamma |\psi\rangle. \quad (43)$$

شکل (۱۸) این حالت را نشان می دهد. می توانیم یکی از این شبه ذرات را حول ذره دیگر بچرخانیم. برای این کار می بایست عملگری که کار این چرخش را انجام می دهد روی این حالت اثر دهیم: حالت جدید عبارت است از:

$$C_{\gamma'} |\psi(a, b)\rangle \quad (44)$$

که در آن γ' یک منحنی است که این چرخش را انجام می دهد.

■ **تمرین: الف:** نشان دهید که حالت جدید یعنی حالتی که پس از این چرخش بدست می آید تفاوتی با حالت قبل از چرخش ندارد. به اصطلاح می گوییم که چرخاندن یک آنیون از نوع e حول یک آنیون دیگر فاز $+1$ تولید می کند. یعنی دو آنیون از نوع e نسبت به هم آمار

بوزونی دارند.

ب: با استدلال مشابه نشان دهید که دو انیون از نوع m نیز نسبت به هم آمار بوزونی دارند.

پ: نشان دهید که هرگاه یک انیون از نوع e را حول یک انیون m بچرخانیم تابع موج فاز $1-$ می گیرد.

تمرین بالا نشان می دهد که چرا این ذرات را انیون می نامیم زیرا رفتار کاملاً متفاوتی با بوزون ها و فرمیون ها دارند. این ذرات نسبت به ذرات هم جنس خود مثل بوزون ها رفتار می کنند ولی نسبت به ذرات غیر هم جنس خود مثل فرمیون ها رفتار می کنند.

۱۰۸ رایانش کوانتومی با آنیون های آبلی در مدل کیتایف

آنچه که تا کنون در باره حالت های برانگیخته و شبه ذرات انیونی گفته ایم راهی را برای رایانش کوانتومی توپولوژیک نشان می دهد. مطابق با این راه می توانیم یک جفت آنیون از نوع e در یک نقطه از چنبره تولید کنیم. (با اعمال یک عملگر z روی یکی از اسپین ها در یکی از اضلاع شبکه). سپس می توانیم با اعمال عملگرهای C_γ این انیون ها را حرکت دهیم تا پس از دور کامل روی یکی از سیکل های چنبره به هم نزدیک شده و در آخرین مرحله باز هم با اعمال یک عملگر z روی آخرین ضلع، سیکل را کامل کرده و به اصطلاح دو تا انیون های تولید شده را نابود کنیم. حاصل این کار این است که یک عملگر $C_{1,z}$ را روی حالت پایه اعمال کرده ایم. اما این عملگر چیزی نیست جز عملگر منطقی X_1 . به روشهای مشابه می توانیم عملگرهای Z_1, X_2, Z_2 را روی این کیوبیت ها اعمال کنیم.

به طور خلاصه می توانیم با تولید انیون ها به صورت موضعی، حرکت دادن آنها و در نهایت نابود کردن آنها یک مجموعه گیت کوانتومی را روی دو کیوبیتی که در حالت های پایه مدل کیتایف ذخیره شده اند اعمال کنیم.

چه چیز توپولوژیکی در این گیت ها نهفته است؟ به چه معنا این نوع رایانش نسبت به خطا مقاوم است؟ برای پاسخ به این سوال می بایست به تمرین زیر توجه کنید.

■ **تمرین:** فرض کنید که در جابجایی انیون ها دچار خطا شویم و وقتی انیون ها را حول سیکل های چنبره حرکت می دهیم یک منحنی بسته

ولی تغییر شکل یافته را طی کنیم. نشان دهید که این نوع تغییر شکل ها تا وقتی که منحنی پاره نشود هیچ تغییری در گیت های اعمال شده ندارد.

متأسفانه این ها تنها گیت های کوانتومی ای هستند که می توانیم با انیون های آبلی اعمال کنیم. به این معنی مدل آبلی کیتایف یک مدل عمومی برای رایانش کوانتومی نیست چرا که اجازه اعمال گیت های دلخواه یک کیوبیتی را نمی دهد. برای اینکه بتوانیم رایانش کوانتومی توپولوژیک را به صورت عمومی یا به اصطلاح یونیورسال انجام دهیم می بایست از انیون های آبلی فراتر رویم.

۹ رایانش توپولوژیک با آنیون های غیر آبلی

محدودیت مهم مدل آبلی این بود که با چرخاندن آنیون ها به دور هم توابع موج به شکل خیلی ساده ای تغییر می کردند. برای آنکه این محدودیت را برطرف کنیم می بایست به مدل غیر آبلی فکر کنیم. ما نخست مدل غیر آبلی را به صورت نظری مطالعه می کنیم با این امید که نهایتاً این مدل ها، هر چند با تغییراتی، از نظر تجربی ساخته خواهند شد. امروزه حدس زده می شود که برانگیختگی های بعضی سیستم های ماده چگال مثل اثر کوانتومی کسری هال از نوع آنیون های غیر آبلی هستند، اگر چه هنوز اثبات تجربی کاملی برای این حدس وجود ندارد، اما امیدواری این است که یا در بعضی از مواد بطور طبیعی یا در آرایه ای از کیوبیت ها با برهم کنش هایی که بین آنها ساخته می شود، به طور مصنوعی این نوع آنیون ها مشاهده شوند.

یک مدل توپولوژیک غیر آبلی چنین چیزی است:

یک: یک مدل بس ذره ای با یک هامیلتونی مثل H در دو بعد که حالت پایه آن واگن است و برانگیختگی های آن نیز دارای انیون است. این حالت های برانگیخته نیز طبیعتاً واگن هستند و با یک گاف انرژی مشخص از حالت پایه جدا شده اند. بسته به تعداد انیون هایی که در این فضای برانگیخته وجود دارد، انرژی این حالت ها نیز فرق می کند ولی این انرژی فقط به تعداد انیون ها بستگی دارد. فرض بر این است که میتوان این انیون ها را کنترل کرد یعنی اینکه آنها را تولید کرد، حرکت داد، دور هم چرخاند و سرانجام نابود کرد.

دو: این آنیون ها یک نوع بار توپولوژیک دارند که آن را با a, b, c, \dots نمایش می دهیم. طبیعتاً این بارهای توپولوژیک به صورت موضعی قابل آشکار سازی نیستند و تنها با مشاهده پذیرهای سرتاسری قابل شناسایی هستند.

سه: اگر انرژی حالت های برانگیخته ای که دارای یک تعداد انیون است برابر با E باشد، راحت تر است که یک هامیلتونی جدید مثل $H' := H - E$ تعریف کنیم. در این صورت انیون ها در حالت پایه هامیلتونی جدید H' زندگی می کنند و حالت پایه این هامیلتونی با یک گاف انرژی از دیگر حالت ها جدا شده است. به یک نکته باید اشاره کنیم و آن اینکه H' واقعا یک برساخته مصنوعی و صوری نیست. در واقع انیون ها برانگیخته های جایگزیده هستند و وقتی که مکان آن ها را ثابت می کنیم، این کار را به صورت تجربی با ایجاد یک چاه پتانسیل بسیار کوچک در محل آنها انجام می دهیم. این چاه ها هامیلتونی اولیه را تغییر می دهند و به هامیلتونی جدیدی تبدیل می کنند که حالا انیون ها در حالت پایه آن هستند.

چهار- اگر در این فضای پایه جدید انیون های a, b, c, \dots وجود داشته باشند، حالت های واگن مختلف را به صورت

$$\Psi_\alpha(a, b, c, \dots) \quad \alpha = 1 \dots D$$

نشان می دهیم. در این جا D بعد این زیرفضای پایه است. از آنجا که همه اعمالی که روی انیون ها انجام می دهیم و همه محاسباتی که نتیجه این اعمال هستند در همین زیر فضای پایه رخ می دهند، از این به بعد همین زیرفضا را فضای هیلبرت می نامیم. نکته مهم این است که این فضا دارای ساختار ضرب تانسوری نیست، زیرا انیون ها دارای درجات آزادی موضعی ^{۳۸} نیستند. به عبارت دیگر اگر فضایی که دارای یک انیون از نوع a است را با V_a و فضایی که دارای دو انیون است را با V_b نشان دهیم، فضایی که دارای دو انیون a, b است در رابطه $V_{ab} = V_a \otimes V_b$ صدق نمی کند. این درست بر خلاف آن ویژگی است که ما در سیستم های دارای درجات آزادی موضعی مثلا در مورد اسپین هامی بینیم. حال اگر انیونهای این فضا را در یک مسیر گیسو مانند حرکت دهیم و آنها را طی مسیری مثل γ به سر جای خود برگردانیم، حالتی مثل $\Psi_\alpha(a, b, c, \dots)$ به ترکیبی خطی از حالت های دیگر همین فضا تبدیل می شود. این ترکیب خطی جدید طبیعتا بستگی به مسیر طی شده دارد. می توان نوشت:

$$\Psi_\alpha(a, b, c, \dots) \longrightarrow \sum_\beta (U_{a,b,c,\dots}^\gamma)_{\alpha\beta} \Psi_\beta(a, b, c, \dots) \quad (45)$$

که در آن $U_{a,b,c,\dots}^\gamma$ یک عملگر یکانی است. این عملگر یکانی نقش همان گیت های توپولوژیک را ایفا می کند که نسبت به جزئیات مسیر γ حساس نیست. برای این که نوع این گیت ها و امکانات مختلف آنها را یاد بگیریم باید خود فضای هیلبرت را بهتر بشناسیم.

■ ساختار فضای هیلبرت انیون ها:

local degrees of freedom^{۳۸}

اگر فقط یک انیون داشته باشیم، مستقل از این که این آنیون چه باری داشته باشد، بعد فضای هیلبرت برابر با یک است. بنابراین یک آنیون به درد ذخیره کردن هیچ گونه اطلاعاتی نمی خورد.

اگر دو تا انیون مثلا از نوع a و b داشته باشیم، بار کل این آنیون ها می تواند مقادیر مختلفی داشته باشد. این که بار کل چه مقداری می تواند اختیار کند، از خواص فیزیکی آنیون ها ناشی می شود. این بار کلی را با c نشان می دهیم و به صورت نمادین می نویسیم:

$$a \times b = \sum_c N_{ab}^c c. \quad (46)$$

اعداد N_{ab}^c اعداد صحیح هستند که نشان می دهند چه تعداد حالت از دو آنیون با بارهای a و b وجود دارد، که بار کل آنها برابر با c است. رابطه (46) قاعده ترکیب^{۳۹} نامیده می شود. منظور از ترکیب نیز به معنای جوش خوردن آنیون ها با یکدیگر نیست (در واقع آنیون ها می توانند از هم دور باشند)، بلکه این است که بار کل دو آنیون می تواند مقادیر تنوع به خود بگیرد. این رابطه نمادین انعکاسی از رابطه دقیق زیر است:

$$V_a \otimes V_b = \bigoplus_c V_{ab}^c, \quad \dim(V_{ab}^c) = N_{ab}^c. \quad (47)$$

این رابطه در حقیقت بیان می کند که دو انیون با بارهای a و b که بار کل آنها برابر با c است، می توانند در N_{ab}^c حالت مختلف قرار بگیرند. این عدد در واقع درجه واگنی این ترکیب مشخص از a, b با بار کل c را نشان می دهد. اگر حالت های مختلف از این نوع را با یک اندیس مثل μ نشان دهیم، می توان نوشت که یک حالت در این زیرفضا به شکل برهم نهی زیر است:

$$|\psi\rangle \in V_{ab}^c \longrightarrow |\psi\rangle = \sum_{\mu=1}^{N_{ab}^c} \alpha_{\mu} |(a, b)_c, \mu\rangle. \quad (48)$$

α_{μ} ها بسته به شیوه تهیه این حالت (چرخاندن این آنیون ها)، یا چگونگی اندازه گیری آنها می شوند. حال لازم است توضیح دهیم که شاخص μ دقیقا نشان دهنده چیست؟ این شاخص را تنها با تشبیه، آن هم با تشبیه ناکامل می توان توضیح داد.

■ توضیح معنای μ با یک تشبیه:

دو ذره اسپین $\frac{1}{2}$ را در نظر بگیرید. این دو ذره می توانند در حالتی قرار بگیرند که اسپین کل آنها برابر با 0 یا برابر با 1 باشد. با همان نوع نمادگذاری که برای بارهای توپولوژیک به کار بردیم، می نویسیم:

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 0 + 1. \quad (49)$$

^{۳۹}fusion rule

یا

$$V_{\frac{1}{2}} \otimes V_{\frac{1}{2}} = V_0 \oplus V_1. \quad (50)$$

در این جا V_0 یک فضای یک بعدی با بردار پایه

$$|(1/2, 1/2); 0, S_z = 0\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|+, -\rangle - |-, +\rangle)$$

و V_1 یک فضای سه بعدی است که حالت های مختلف آن عبارت اند از:

$$\begin{aligned} |(1/2, 1/2); 1, S_z = 1\rangle &\equiv |+, +\rangle \\ |(1/2, 1/2); 1, S_z = 0\rangle &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}|+, -\rangle + |-, +\rangle \\ |(1/2, 1/2); 1, S_z = -1\rangle &\equiv |-, -\rangle. \end{aligned} \quad (51)$$

در این جا S_z نقشی شبیه به μ را ایفا می کند. به یک نکته در همین ابتدا می توانیم توجه کنیم: این که یک حالت خاص در فضای V_0 است یا فضای V_1 به صورت موضعی مشخص نمی شود و در واقع این اطلاعات نه در وضعیت تک تک اسپین ها بلکه در نوع همبستگی آنها نهفته است. حال می توان پرسید که چرا S_z نقشی مثل یک بار توپولوژیک را ایفا نمی کند؟ چرا خودش یک نوع c' نیست؟ دلیل اش این است که S_z به صورت موضعی (البته تاحدودی) قابل تشخیص است، چرا که با اندازه گیری یکی از اسپین ها می توانیم نتیجه بگیریم که آیا در حالت $S_z = 1$ هستیم یا در حالت $S_z = -1$ ؟ در عین حال این درجه آزادی موضعی کامل هم نیست، چرا که با اندازه گیری یکی از اسپین ها نمی توانیم تشخیص دهیم که در حالت $S_z = \pm 1$ هستیم یا حالت $S_z = 0$. یک دلیل مهم دیگر هم وجود دارد برای این که خود را قانع کنیم چرا S_z نقشی شبیه به شاخص μ را ایفا می کند و نه نقشی شبیه به یک نوع بار توپولوژیک c' . دلیل اش این است که S_z یک کمیت پایسته نیست. در واقع در تمام برهم کنش هایی که این دو ذره با محیط خود انجام می دهند (با فرض این که این برهم کنش ها با اسپین کل یعنی $\mathbf{S}_{tot} \cdot \mathbf{S}_{tot}$ جابجا می شوند)، اندازه اسپین کل حفظ می شود و حال آنکه اندازه S_z می تواند تغییر کند. در نتیجه به این معنا S_z نقشی شبیه به بار توپولوژیک را ایفا نمی کند. به همین سیاق نیز شاخص μ یک بار توپولوژیک نیست، زیرا با چرخاندن انیون های a و b حول یکدیگر، بار توپولوژیک کل یعنی c حفظ می شود، ولی شاخص μ تغییر می کند، به همان شکلی که در رابطه کلی (۴۸) نشان داده شده است.

■ مثال و تمرین:

حالت های زیر را در نظر بگیرید که برای نشان دادن آنها هم نمادگذاری های (۵۱) را به کار برده ایم و هم گفته ایم که این حالت ها برای کد

کردن چه مقداری از یک کیوبیت به کار می روند:

$$\begin{aligned} |\bar{0}\rangle &= \equiv |(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); 0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+, -\rangle - |-, +\rangle) \\ |\bar{1}\rangle &= \equiv |(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); 1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+, -\rangle + |-, +\rangle). \end{aligned} \quad (52)$$

اگر فقط به یکی از اسپین ها دسترسی داشته باشیم حالت های فوق از هم قابل تمیز نیستند. بنابراین حالت کیوبیت، نه در وضعیت تک تک اسپین ها بلکه در نوع همبستگی آنها درج شده است. دقت کنید که این تنها یک مثال برای نشان دادن این است که می توان اطلاعات کوانتومی را در همبستگی بین ذرات و نه در نوع خود آنها ذخیره کرد و هدف آن تنها این است که برای فهم آتیون ها و این که چگونه کیوبیت ها را در آنها ذخیره کنیم آماده شویم. پس از این مثال ابتدایی به یک مثال دیگر در همین زمینه یعنی اسپین ها توجه کنیم. فرض کنید به دلایلی علاقمند باشیم که کیوبیت های منطقی را در حالت های چند ذره ای با اسپین کل صفر ذخیره کنیم. حال به تمرین زیر توجه کنید.

■ **تمرین:** چهار ذره اسپین $1/2$ را در نظر بگیرید. اسپین کل این چهار ذره از رابطه زیر بدست می آید:

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = (0 + 1) \times (0 + 1) = 0 + 1 + 1' + 0' + 1'' + 2. \quad (53)$$

حالت های اسپین صفر در طرف راست برای کد کردن یک کیوبیت به کار می روند.

الف: شکل صریح این دو حالت را بدست آورید.

ب: حال فرض کنید که ۶ تا ذره اسپین $1/2$ داریم و هم چنان می خواهیم کیوبیت های منطقی را در حالت های با اسپین کل صفر ذخیره کنیم. این ۶ ذره برای کد کردن چند تا کیوبیت می توانند مورد استفاده واقع شوند؟ پاسخ این سوال را برای وقتی که ۸ ذره و ۱۰ ذره داریم نیز پیدا کنید. (لزومی به پیدا کردن فرم صریح حالت ها نیست).

پ: (قسمت سخت) وقتی که n تا اسپین را در هم ضرب می کنیم تعداد اسپین های 0 را در طرف راست بدست آورید. این تعداد را با D_n نشان می دهیم. برای n های بزرگ، D_n را به صورت $D_n \sim d_0^n$ بنویسید. d_0 را بعد کوانتومی این ذرات می خوانیم. دلیل این

نام گذاری این است که تشابهی با بعد کیوبیت های مستقل دارد به این معنا که هرگاه n تا کیوبیت مستقل داشته باشیم می دانیم که فضای هیلبرت این مجموعه برابر است با 2^n . در این جا بعد بجای 2 یک عدد کمتر از 2 است.

۱۰ آنیون های فیبوناچی

پس از این تمرین ها می توانیم به موضوع آنیون های غیرآبلی پردازیم. به جای اینکه به توصیف کلی روابط بین آنیون ها و قیدهای مربوط به قواعد ترکیب در حالت کلی پردازیم، کار خود را از یک مثال ساده شروع می کنیم. آنیون های موسوم به آنیون های فیبوناچی، F_n ساده ترین آنیون ها هستند. این آنیون ها فقط در یک نوع (یک نوع بار) ظاهر می شوند. این نوع آنیون را با 1 نشان می دهیم. می توانیم بگوییم یا قرار بگذاریم که این نوع آنیون بار برابر با 1 دارد و خلا یعنی حالتی که هیچ آنیونی در آن نیست بار صفر دارد. حدس زده می شود که این نوع آنیون ها در شرایط خاصی در اثر کوانتومی هال وجود دارند. قاعده ضرب این آنیون ها به این شکل است:

$$0 \times 0 = 0$$

$$0 \times 1 = 1$$

$$1 \times 0 = 1$$

$$1 \times 1 = 0 + 1. \quad (۵۴)$$

این قاعده های ضرب نیز کاملاً بدیهی هستند به جر مورد آخر که به این معناست که دو آنیون فیبوناچی می تواند بار کل شان برابر با صفر یا یک باشد. دقت کنید که یک آنیون منفرد با بار صفر واقعا به معنای این است که هیچ آنیونی در سیستم بس ذره ای وجود ندارد، ولی دو آنیون با بار کل صفر به معنای این نیست که هیچ آنیونی وجود ندارد. معنایش فقط این است که بار کل این دو آنیون مثل حالتی با هیچ آنیون است و اگر این دو آنیون را کنار هم بیاورید یک دیگر را از بین خواهند برد. با همان نمادگذاری دقیق اگر به این روابط نگاه کنیم به این معنا هستند که حالت های فیزیکی دو آنیون فیبوناچی حالت های زیر هستند.

$$|(0,0)_0\rangle$$

$$|(0,1)_1\rangle$$

Fibonacci^{۴۰}

$$|(1,0)_1\rangle$$

$$|(1,1)_0\rangle$$

$$|(1,1)_1\rangle.$$

(۵۵)

۱۱ ابرگزینش

برهم نهی یکی از مهم ترین ویژگی های مکانیک کوانتومی است. ما می توانیم یک الکترون را در برهم نهی از دو حالت اینجا و آنجا قرار دهیم. می توانیم این دو الکترون را در حالت اسپین بالا و اسپین پایین نیز تهیه کنیم. هم چنین می توانیم با آزمایشهای مناسبی فاز نسبی بین دو حالت برهم نهی شده را تمیز دهیم. اما باید به یاد بسپاریم که هر نوع برهم نهی ای در فیزیک کوانتومی مجاز نیست. به عنوان مثال نمی توانیم یک برهم نهی از یک الکترون و یک پروتون داشته باشیم. در واقع در اینجا یک قانون بقا، یعنی قانون بقای بار الکتریکی وجود دارد که مانع تبدیل یک الکترون به پروتون و در نتیجه ایجاد یک برهم نهی بین این دو حالت می شود. این قانون را قانون ابرگزینش^{۴۱} می نامند. دلیل وجود این قانون این است که هیچ فرایند فیزیکی شناخته شده ای برای تبدیل یک الکترون به پروتون وجود ندارد، حال آنکه براحتی می توان با اعمال یک میدان مغناطیسی یک الکترون اسپین بالا را به یک الکترون اسپین پایین تبدیل کرد. در مورد انیون ها هم یک قانون ابرگزینش وجود دارد که اجازه تبدیل بار انیون ها به یکدیگر و در نتیجه ایجاد برهم نهی بین دو حالت با بار انیونی متفاوت را نمی دهد.

۱۰.۱۱ ساختن کیوبیت ها از آنیون های فیبوناچی

با این مقامات می توانیم بفهمیم که چگونه می توانیم از آنیون های فیبوناچی کیوبیت درست کنیم. دو آنیون فیبوناچی می تواند بار کل 0 یا 1 داشته باشند، بنابراین ترکیب خطی مثل ترکیب خطی زیر نمی تواند وجود داشته باشد:

$$|\psi\rangle = a|(1,1)_0\rangle + b|(1,1)_1\rangle, \quad (۵۶)$$

Super-Selection^{۴۱}

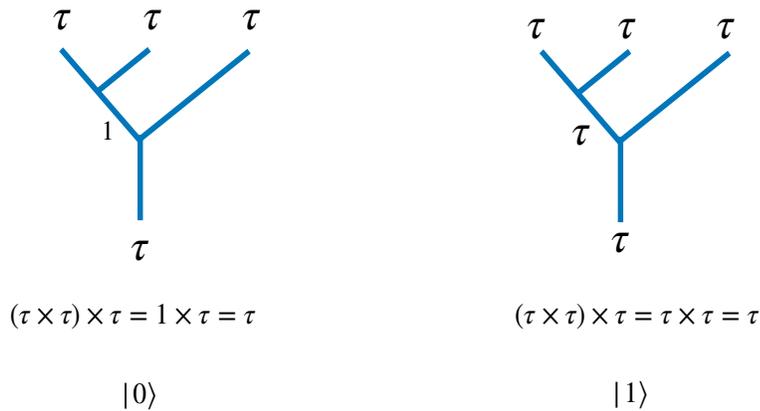
و از دو انیون فیوناچی نمی توان یک کیوبیت درست کرد. ناگزیریم که از سه آنیون فیوناچی با بار کل 1 به ترتیب زیر استفاده کنیم:

$$|\psi\rangle = a|((1,1)_0,1)_1\rangle + b|((1,1)_1,1)_1\rangle \quad (57)$$

البته از سه انیون با بار کلی صفر نمی توان کیوبیت ساخت. چرا که فقط یک حالت با این بار کلی وجود دارد و آن هم این است:

$$|\phi\rangle = |((1,1)_1,1)_0\rangle. \quad (58)$$

شکل (۱۹) نشان می دهد که دو حالت متفاوت یک کیوبیت چگونه از آنیون های فیوناچی ساخته می شوند:



شکل ۱۹: دو حالت متفاوت یک کیوبیت از سه آنیون فیوناچی ساخته می شوند.

■ **تمرین: الف:** فرض کنید که می خواهیم کیوبیت های منطقی را در حالت های بس-انیونی با بار کل صفر ذخیره کنیم. از قاعده ضرب فوق استفاده کنید و بگویید که با 4, 5, 6, 7, 10 انیون بعد فضای هیلبرت منطقی چقدر خواهد شد. یک رابطه کلی برای این بعد بدست آورید و از آنجا بعد کوانتومی d_1 را محاسبه کنید.

ب: قسمت الف را برای وقتی که می خواهیم کیوبیت های منطقی را در حالت های بس ذره ای با بار ۱ ذخیره کنیم تکرار کنید. به خصوص d_7 را محاسبه کنید.

۲.۱۱ بعد کوانتومی انیون های فیبوناچی

دیدیم که از سه آنیون فیبوناچی می توان یک کیوبیت ساخت. می توانیم این فرایند را ادامه دهیم و بینیم از چهار یا پنج آنیون فیبوناچی چه تعداد کیوبیت قابل ساخته شدن است. به جای آزمودن حالت های با تعداد کم از آنیون ها می توانیم سعی کنیم یک رابطه کلی برای n تا آنیون فیبوناچی پیدا کنیم. از رابطه زیر شروع می کنیم:

$$\tau^{\times n} = a_n 1 + b_n \tau \quad (59)$$

که در نتیجه آن

$$\tau^{\times(n+1)} = (a_n 1 + b_n \tau) \times \tau = a_n \tau + b_n (\tau \times \tau) = a_n \tau + b_n (1 + \tau) = b_n 1 + (a_n + b_n) \tau \quad (60)$$

بنابراین به رابطه تکرار زیر می رسم:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= b_n \\ b_{n+1} &= a_n + b_n, \end{aligned} \quad (61)$$

یا به صورت ماتریس

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \quad (62)$$

حل این رابطه تکرار منجر به نتیجه زیر می شود که کامل کردن آن بر عهده خواننده خواهد بود:

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (63)$$

نتیجه نهایی این است که برای n های بزرگ خواهیم داشت:

$$b_n \sim \phi^n \quad (64)$$

که در آن

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}. \quad (65)$$

بنابراین بعد کوانتومی آنیون های فیبوناچی برابر با $\phi = 1.618$ یعنی کسر طلایی^{۴۲} است که از ۲ کوچکتر است.

^{۴۲}Golden Ration

۳.۱۱ قواعد ترکیب

یک حالت در نظر بگیرید که دارای سه تا انیون فیوناچی است. انیون ها را با بارشان نشان می دهیم. بنابراین ، این حالت را به صورت زیر نشان می دهیم:

$$|1, 1, 1\rangle. \quad (۶۶)$$

ولی این توصیف از حالت کوانتومی کامل نیست و حالت سه تا انیون را به طور کامل مشخص نمی کند، زیرا نمی گوید که بار کل سه انیون چیست، آیا برابر با 0 است یا 1؟. بنابراین یک توصیف کامل می بایست به صورت زیر باشد:

$$|111\rangle_0, \quad or \quad |111\rangle_1. \quad (۶۷)$$

که اندیس 1 یا 0 بار کل را مشخص می کند. ولی بازهم این توصیف کامل نیست، زیرا بار دو انیون اول می توانسته 0 یا 1 بوده باشد و این بار کل صفر یا یک را تولید کند. به عبارت دقیق تر اگر بار کل برابر با 0 باشد آنگاه توصیف کامل به صورت زیر است:

$$|(11)_1, 1\rangle_0, \quad (۶۸)$$

اما اگر بار کل برابر با 1 باشد، آنگاه بار کل دو ذره اول به یکی از صورت های زیر است:

$$|(11)_0, 1\rangle_1, \quad or \quad |(11)_1, 1\rangle_1. \quad (۶۹)$$

بنابراین زیر فضایی که در آن بار کل برابر با صفر است یک زیر فضای یک بعدی و زیر فضایی که در آن بار کل برابر با یک است یک زیر فضای دو بعدی است.

حال از خود می پرسیم که کدام توصیف را باید به کار ببریم؟ اینکه علاوه بر بار کل ، بار کل دو ذره اول و دوم را معین کنیم یا اینکه بار کل دو ذره دوم و سوم را؟ یا بار کل دو ذره اول و سوم را؟ پاسخ این است که این هر سه توصیف معادل هستند و حالت هایی که با این توصیف های مختلف تعریف می شوند همه در یک فضا هستند و آنها را می توان به صورت ترکیب خطی از یک دیگر نوشت. البته دقت کنید که در این جا این فرض نهفته است که توصیفی کامل تر از آنچه که گفته ایم وجود ندارد به این معنا که نمی توان بار کل ذره اول و دوم را به همراه بار کل ذره دوم و سوم هر دو باهم تعیین کرد. به عبارت دیگر اگر عملگر بار کل را با Q نشان دهیم ، پیش فرض این است که :

$$[Q_1, Q_{12}] = [Q_2, Q_{12}] = 0, \quad [Q_{12}, Q_{23}] \neq 0, \quad etc. \quad (۷۰)$$

■ **تمرین:** اگر n تا انیون فیوناچی با بار کل ۱ داشته باشیم چند کیویت منطقی می توانیم در آنها کد کنیم. به عبارت بهتر چند حالت داخلی برای این انیون ها قابل تصور است به قسمی که بار کل آنها برابر با یک باشد. برای n ها زیاد تعداد این حالت ها که همان بعد فضای هیلبرت است را بدست آورید و آن را به صورت d_q^n نشان دهید. این فضای هیلبرت اصطلاحاً فضای ترکیب^{۴۳} خوانده می شود و d_1 نیز بعد کوانتومی^{۴۴} نامیده می شود.

با قبول این فرض ها آنگاه خواهیم داشت:

$$|(1, 1)_1, 1\rangle_0 = |1, (1, 1)_1\rangle_0, \quad (۷۱)$$

$$\begin{aligned} |(11)_0, 1\rangle_1 &= F_{00}|1, (1, 1)_0\rangle_1 + F_{01}|1, (1, 1)_1\rangle_1, \\ |(11)_1, 1\rangle_1 &= F_{10}|1, (1, 1)_0\rangle_1 + F_{11}|1, (1, 1)_1\rangle_1. \end{aligned} \quad (۷۲)$$

این روابط در شکل (۲۰) نشان داده شده اند.

Fusion Space^{۴۳}
Quantum Dimension^{۴۴}

$$\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \\ | \\ 0 \end{array} = F_{00} \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \\ | \\ 0 \end{array} + F_{01} \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \\ | \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \\ | \\ 1 \end{array} = F_{10} \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \\ | \\ 0 \end{array} + F_{11} \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \\ | \\ 1 \end{array}$$

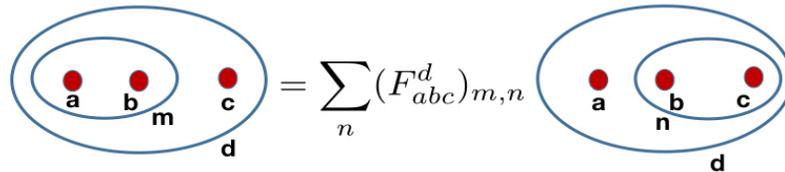
شکل ۲۰: ، ماتریس ترکیب برای آنیون های فیوناچی، بار همه آنیون های ورودی (بالای دیاگرام ها) و خروجی (پایین دیاگرام ها) برابر با 1 است.

سوال این است که این ضرایب را چگونه باید تعیین کرد. آیا این ضرایب دلخواهی هستند یا با توجه به یک مجموعه از قیدهای منطقی و ریاضی به ما تحمیل می شوند. پاسخ این سوال این است که این ضرایب دلخواهی نیستند و به طور یکتایی با توجه به روابط ترکیب تعیین می شوند. می توانیم برای مدل خاص فیوناچی استدلال کنیم و این ضرایب را به دست آوریم ولی بهتر آن است که ببینیم در کلی ترین حالت این روابط و قیود حاکم بر آنها چیستند. در انتها می توان این ضرایب را برای مدل خاص فیوناچی به دست آورد.

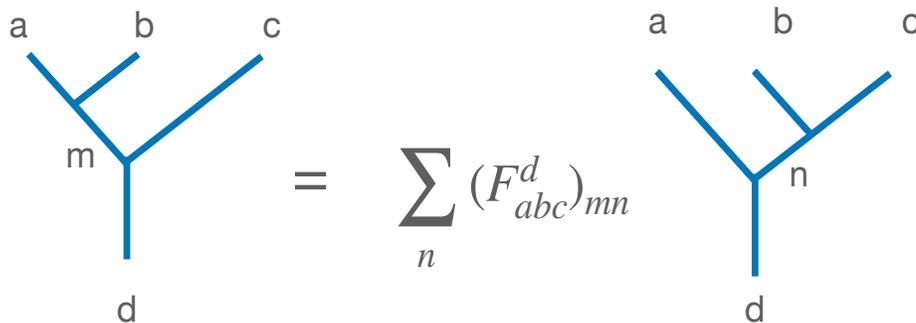
تعمیم این روابط به انیون های کلی با بارهای دلخواه به شکل زیر در می آید که اگر چه شامل ماتریس هایی با تعداد اندیس های زیاد است ولی معنای ساده ای دارد و خواننده می تواند همواره به شکل (۲۰) نگاه کند تا معنای آن را دریابد.

$$|(a, b)_m, c\rangle_d = \sum_n (F_{abc}^d)_{mn} |a, (b, c)_n\rangle_d. \tag{۷۳}$$

این رابطه نیز در شکل (۲۲) یا معادل آن در شکل (۲۵) نشان داده شده است.



شکل ۲۱: ماتریس F یک پایه را بر حسب پایه دیگر بسط می دهد. ...



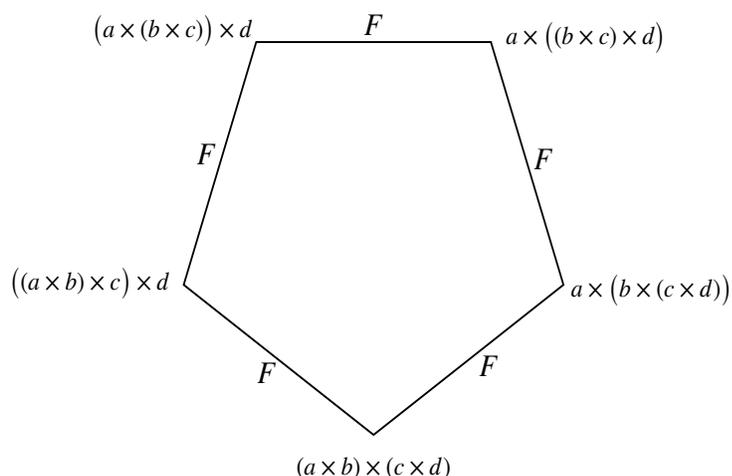
شکل ۲۲: رابطه (۷۳) به شکل تصویر.

۴.۱۱ اتحاد پنج ضلعی یا پنتاگون

چگونه می توان این ماتریس ها را حساب کرد؟ آیا هیچ قیدی روی این ماتریس ها وجود دارد؟ اگر تقاضا کنیم که این حالت های وابسته به توصیف های مختلف به نحو شرکت پذیری (یعنی ساده ای) به هم مرتبط باشند، آنگاه قیود محکمی روی ماتریس های F پدیدار خواهند شد که فرم ماتریس های F را بشدت محدود می کند. در واقع مستقل از مسئله آنبونها هر جبری که بخواهد شرکت پذیر باشد تابع این قیدهاست. یک جبر کلی را در نظر بگیرید. سوال این است که قاعده ضرب در این جبر باید چگونه باشد که یک ضرب چندتایی از عوامل این جبر مستقل از ترتیب ضرب کردن دو به دو این عوامل باشد. به عنوان مثال باید عبارت هایی مثل عبارات زیر همه با هم مساوی باشند تا جبر سازگار باشد:

$$(a(bc)d)((ef)g) = (((ab)(cd))e)(fg) = \dots = (ab)(c(de)f)g \quad (74)$$

بیرکھوف و مک لین ۴۵ سالها پیش نشان داده اند که برای سازگاری یک جبر شرکت پذیر تنها کافی است که ضرب عوامل چهارتایی مستقل از جای پرانتزها باشد. به عبارت دیگر کافی است که یک عبارت حاصل از ضرب چهار عامل مستقل از ترتیب ضرب کردن آنها باشد تا این عدم وابستگی برای ضرب هر تعداد عاملی درست باشد. این اتحاد که به اتحاد پنج ضلعی یا پنتاگون معروف است در شکل (۲۳) نشان داده شده است.



شکل ۲۳: رابطه (۷۳) اتحاد پنج ضلعی برای یک جبر شرکت پذیر.

در حالتی که این ضرب بین آنیون ها و ترکیب خطی آنها صورت می گیرد، شکل اتحاد پنتاگون الزام می دارد که اگر از حالت

$$|((a, b), c), d). \quad (75)$$

شروع کنیم و بخواهیم به حالت

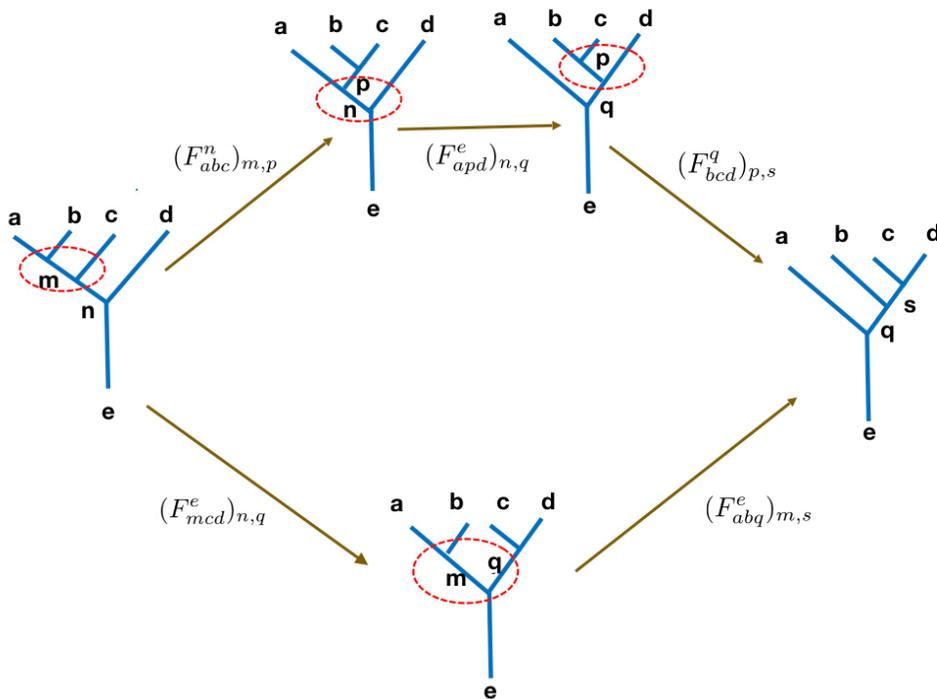
$$|a, (b, (c, d))) \quad (76)$$

برسیم، نتیجه نهایی ترکیب خطی مستقل از ترتیبی باشد که ما برای ترکیب آنیون ها به کار می بریم. در واقع رابطه نشان داده شده در شکل (۲۳) به صورتی در می آید که در شکل های (۲۴) و (۲۵) نشان داده شده اند. حاصل کار می بایست مستقل از شیوه دلخواهی باشد که ما برای این

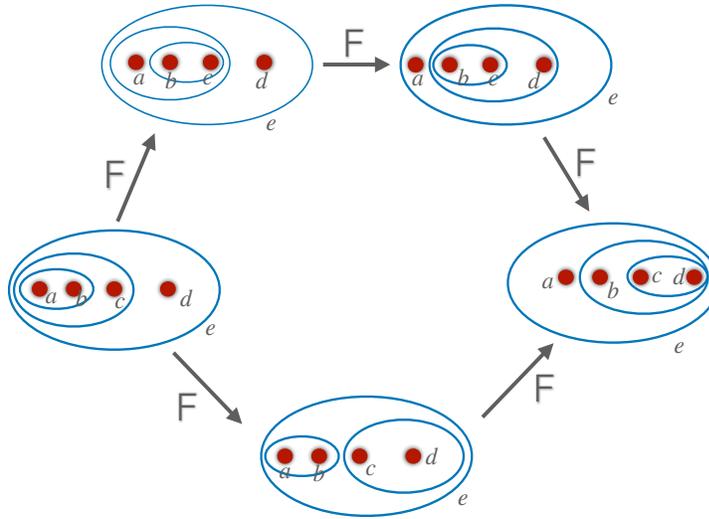
Birkhoff and McLane^{۴۵}

جابجایی به کار می‌بریم. این استقلال منجر به رابطه‌ای بین ماتریس‌های F می‌شود که آن را اتحاد پنج ضلعی یا Pentagon Identity می‌نامند. با استفاده از قرارداد جمع اینشتین در باره اندیس‌های تکراری، و با توجه به شکل (۲۴) اتحاد پنج ضلعی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(F_{abc}^n)_{mp}(F_{apd}^e)_{nq}(F_{bcd}^q)_{ps} = (F_{mcd}^e)_{nq}(F_{abq}^e)_{ms} \quad (77)$$



شکل ۲۴: اتحاد پنج ضلعی. این رابطه یک قید مهم روی ماتریس F اعمال می‌کند. هر نوع ماتریس F ای مجاز نیست.



شکل ۲۵: تصویری متفاوت از اتحاد پنج ضلعی

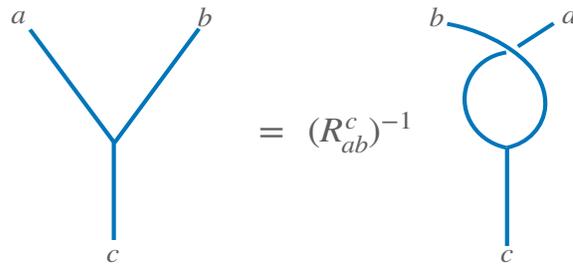
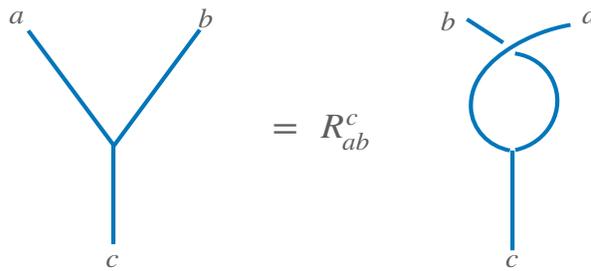
نکته اساسی این است که یک بار که این شرط برقرار باشد دیگر نیازی نیست که شرکت پذیری را برای تعداد بیشتری از انیون‌ها ثابت کنیم و شرکت پذیری برای هر تعدادی نیز برقرار خواهد بود. خواننده دقیق می‌بایست تا کنون متوجه شده باشد که این اتحاد پنج ضلعی منحصر به انیون‌ها نیست و اتحادی است در یک محدوده وسیع‌تر از ریاضیات یعنی هر جایی که عملی شرکت پذیر تعریف شده باشد. به این محدوده وسیع‌تر ممکن است دوباره برگردیم.

۵.۱۱ اتحاد شش ضلعی یا هگزاگون

یکی از اعمال مهم دیگر که روی انیون‌ها انجام می‌دهیم جابجا کردن آنهاست. در فضای دو بعدی این جابجا کردن با جایگشت فرق می‌کند زیرا از نظر فیزیکی دو بار جابجا کردن مثل هیچ بار جابجا کردن نیست. کافی است به جهان خط این دو ذره وقتی که جابجا می‌شوند دقت کنیم و ببینیم که این جهان خط‌ها به دور هم می‌پیچند. عوض کردن جای دو ذره در حالت کلی می‌تواند باعث ایجاد یک فاز شود. این فاز الزاماً

برابر با ± 1 نیست. وقتی که دو انیون (a, b) را که بار کل آن ها c است، در جهت ساعتگرد جابجا می کنیم، فازی که تابع موج اختیار می کند برابر است با R_{ab}^c ، بنابراین می نویسیم:

$$|a, b\rangle_c = R_{ab}^c |b, a\rangle_c. \quad (78)$$

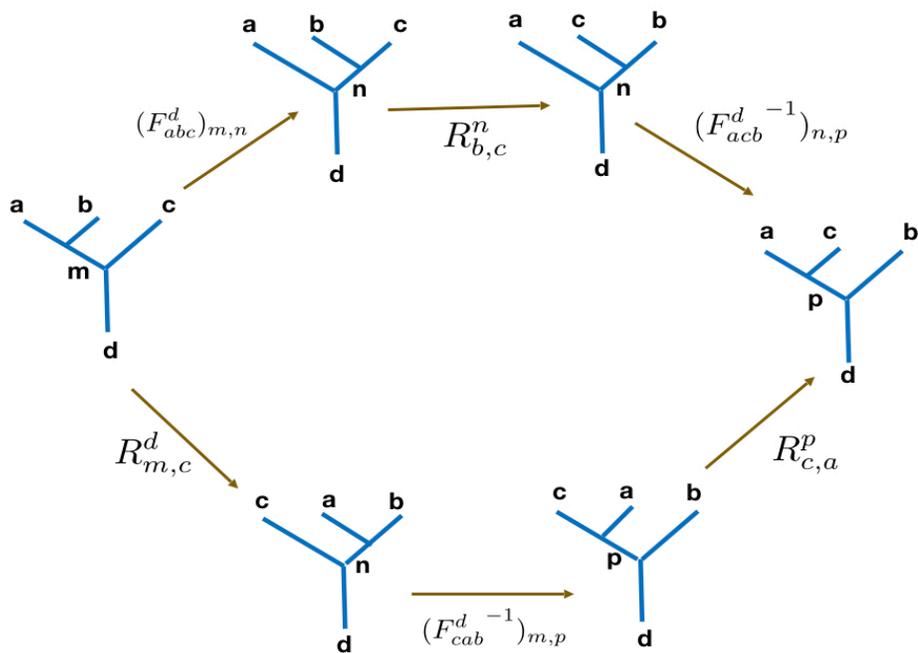


شکل ۲۶: ماتریس R .

وقتی که همین دو انیون را در جهت پادساعتگرد جابجا کنیم فاز ایجاد شده برابر است با $(R_{ab}^c)^{-1}$. وقتی که حالت ها تنها با بار انیون ها مشخص نمی شوند و اعداد کوانتومی دیگری نیز برای مشخص کردن حالت ها لازم است، یعنی وقتی که فضای V_{ab}^c یک بعدی نیست، رابطه جابجایی به صورت زیر نوشته خواهد شد:

$$|a, b; \mu\rangle_c = \sum_{\nu=1}^{N_{ab}^c} (R_{ab}^c)_{\mu\nu} |b, a; \nu\rangle_c, \quad (79)$$

که در آن R_{ab}^c یک ماتریس است. در این درس ما این حالت ها را بررسی نمی کنیم.



شکل ۲۷: اتحاد شش ضلعی یا هگزاگون .

همانطور که شرکت پذیری روی ماتریس های ترکیب یک قید اعمال می کند، روی ماتریس های R نیز یک قید اعمال می کند. برای فهم این موضوع حالت زیر را در نظر بگیرید: $|(a, b)_m, c)_d$. می خواهیم جای ذره ab را با ذره c عوض کنیم. برای این کار دو راه در پیش رو داریم. طبیعی است که نتیجه نهایی بستگی به راهی که ما انتخاب می کنیم نداشته باشد. اما این دو راه کدامند. این دو راه را به صورت سمبلیک بدون توجه به اندیس ها در زیر می نویسیم:

$$|(a, b), c) = F|a, (b, c)) = FR|a, (c, b)) = FRF^{-1}|(a, c), b). \quad (۸۰)$$

دقت کنید که در این رابطه شکل دقیق اندیس ها نوشته نشده. روش دوم برای این کار به صورت زیر است:

$$|(a, b), c) = R|c, (a, b)) = RF^{-1} \longrightarrow |(c, a), b) = RF^{-1}R|(a, c), b). \quad (۸۱)$$

به طور دقیق تر این رابطه می بایست به شکل زیر نوشته می شود:

$$(F_{abc}^d)_{mn} R_{bc}^n (F_{acb}^d)_{np} = R_{mc}^d (F_{cab}^d)_{mp} R_{pb}^d. \quad (۸۲)$$

■ **تمرین:** برای مدل فیوناچی همه عناصر ماتریس ترکیب و ماتریس های R را پیدا کنید. پاسخ: تنها ماتریس های غیربدیهی این ها هستند.

$$F \equiv F_{111}^1 = \begin{pmatrix} \phi & \sqrt{\phi} \\ \sqrt{\phi} & -\phi \end{pmatrix} \quad (۸۳)$$

$$\phi = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}. \quad (۸۴)$$

$$R = \begin{pmatrix} R_{11}^0 & \\ & R_{11}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{4\pi}{5}} & \\ & -e^{i\frac{2\pi}{5}} \end{pmatrix}. \quad (۸۵)$$

۱۲ انیون های آیزینگ

در این بخش به نوع دیگری از آنیون ها می پردازیم که به انیون های آیزینگ معروفند. آنیون های آیزینگ دارای سه نوع بار خنثی یا 1 و دو نوع بار $\sigma = \bar{\sigma}$ و $\psi = \bar{\psi}$ هستند و قاعده ترکیب آنها به صورت زیر است:

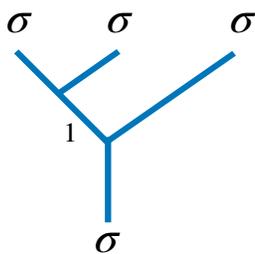
$$\begin{aligned} \sigma \times \sigma &= 1 + \psi \\ \sigma \times \psi &= \sigma \\ \psi \times \psi &= 1. \end{aligned} \quad (۸۶)$$

این که چرا آنیون هایی به این قاعده ترکیب به نام انیون های آیزینگ نامیده می شوند به دلیل این است که وقتی مدل آیزینگ را در نقطه بحرانی با یک نظریه میدان همدیس توصیف می کنیم، متوجه می شویم که این نظریه میدان دارای سه نوع میدان متفاوت با قاعده ضرب عملگری^{۴۶} فوق

^{۴۶}Operator Product Expansion

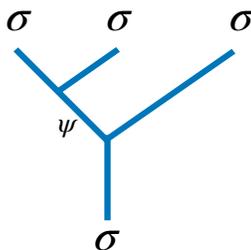
است. به دلیل روابط ترکیب بالا معلوم می شود که اگر بخواهیم از انیون های آیزینگ استفاده کنیم، فقط می توان از انیون های σ استفاده کنیم. یک کیوبیت را می توان به شکل زیر ساخت:

$$|\psi\rangle = a|((\sigma, \sigma)_1, \sigma)_\sigma\rangle + b|((\sigma, \sigma)_\psi, \sigma)_\sigma\rangle \quad (87)$$



$$(\sigma \times \sigma) \times \sigma = 1 \times \sigma = \sigma$$

$|0\rangle$



$$(\sigma \times \sigma) \times \sigma = \psi \times \sigma = \sigma$$

$|1\rangle$

شکل ۲۸: چگونگی ساخت دو حالت از یک کیوبیت با انیون های آیزینگ

۱.۱۲ بعد کوانتومی انیون آیزینگ

می توانیم از خود بپرسیم که با یک تعداد مشخص از انیون های آیزینگ مثلا با n تا، چه تعداد کیوبیت می توانیم بسازیم. اگر به روابط ترکیب مدل آیزینگ نگاه کنیم یراحتی معلوم می شود که با این تعداد انیون آیزینگ چه تعداد کیوبیت می توانیم بسازیم. برای یافتن پاسخ مثل انیون های فیوناچی با استدلال جبری و حل کردن یک رابطه تکرار پیش می رویم. برای این کار با نوشتن چند رابطه اول برای n های کوچک می فهمیم که

$$\sigma^{\times 2n} = a_n(1 + \psi), \quad a_1 = 1 \quad (88)$$

که در نتیجه آن

$$\sigma^{\times 2n+1} = a_n(1 + \psi) \times \sigma = a_n\sigma + a_n\sigma = 2a_n\sigma, \quad (89)$$

و

$$\sigma^{\times 2n+2} = 2a_n \sigma \times \sigma = 2a_n(1 + \psi). \quad (90)$$

این روابط نشان می دهند که $a_{n+1} = 2a_n$ یا $a_n = 2^{n-1}a_1$ در نتیجه با توجه به این که $a_1 = 1$ ، خواهیم داشت

$$\sigma^{\times 2n} = 2^{n-1}(1 + \psi) \quad (91)$$

و

$$\sigma^{2n+1} = 2^n \sigma. \quad (92)$$

این رابطه آخر نشان می دهد که بعد کوانتومی آنیون های آیزینگ یا در واقع آنیون σ برابر با $\sqrt{2}$ است.

۱۳ بعد کوانتومی به صورت کلی

می دانیم که قاعده ترکیب برای آنیون ها به شکل زیر است:

$$a \times b = \sum_c N_{ab}^m m = N_{ab}^m m \quad (93)$$

که در رابطه آخر از قرارداد جمع روی اندیس های تکراری استفاده کرده ایم. با تعریف ماتریس \hat{N}_b می توان این رابطه را به صورت زیر نوشت:

$$a \times b = (\hat{N}_b)_a^m m. \quad (94)$$

با تکرار این رابطه خواهیم داشت:

$$a \times b \times c = (\hat{N}_b)_a^m m \times c = (\hat{N}_b)_a^m (\hat{N}_c)_m^d d = (\hat{N}_b \hat{N}_c)_a^d d. \quad (95)$$

به این ترتیب خواهیم داشت:

$$a_{i_1} \times a_{i_2} \times \cdots a_{i_n} = (\hat{N}_{a_{i_2}} \cdots \hat{N}_{a_{i_n}})_{a_{i_1}}^d d. \quad (96)$$

حال اگر تنها به یک نوع انیون توجه کنیم خواهیم داشت:

$$a \times a \times \cdots a = (\hat{N}_a \cdots \hat{N}_a)_a^d d = (\hat{N}_a^{n-1})_a^d d = \sum_d (\hat{N}_a^{n-1})_a^d d, \quad (97)$$

که در جمله آخر علامت جمع را به خاطر وضوح بیشتر نوشته ایم. این رابطه نشان می دهد که بفهمیم ترکیب n تا انیون از نوع a به چند طریق می تواند انیونی از نوع a را تولید کند باید $(\hat{N}_a^{n-1})_a^d$ را حساب کنیم. این عدد همان تعداد راه ها را بدست می دهد. ترکیب n تا انیون از نوع a نیز به $(\hat{N}_a^{n-1})_a^a$ روش انیونی از همان نوع a را تولید می کند. بنابراین اگر کیوبیت ها را با انیون های از یک نوع مثلاً a تولید کنیم، بعد کوانتومی این نوع انیون برابر است با بزرگترین ویژه مقدار ماتریس \hat{N}_a . حال با این مقدمات می توانیم دوباره به سراغ انیون های فیبوناچی و انیون های آیزینگ برویم.

■ بعد کوانتومی انیون های فیبوناچی: برای این انیون ها داریم:

$$\hat{N}_\tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (98)$$

که بزرگ ترین ویژه مقدار آن برابر است با $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

■ بعد کوانتومی انیون های آیزینگ: برای این انیون ها داریم:

$$\hat{N}_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (99)$$

که بزرگ ترین ویژه مقدار آن برابر است با $\sqrt{2}$.

۱۴ ساختن گیت های توپولوژیک

حال به مرحله ای رسیده ایم که می توانیم یک گیت یک کیوبیتی را به صورت توپولوژیک بسازیم. نخست باید بگوییم که کیوبیت ما چیست؟ و سپس نحوه ایجاد گیت را بیان کنیم. کیوبیت را به عنوان دو حالت زیر از سه انیون فیوناچی در نظر می گیریم:

$$|\bar{0}\rangle := |(1, 1)_0, 1\rangle_1, \quad |\bar{1}\rangle := |(1, 1)_1, 1\rangle_1. \quad (100)$$

شکل () دو حالت این کیوبیت را نشان می دهد. حال اگر دو آنیون اول و دوم را جابجا کنیم مطابق با شکل ماتریس R این حالت ها هر کدام در یک فاز بخصوص ضرب می شوند. بنابراین جابجایی آنیون های اول و دوم گیت زیر را ایجاد می کند:

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} \quad (101)$$

که در آن $\alpha := e^{\frac{2\pi i}{5}}$.

وضعیت جالب وقتی به وجود می آید که آنیون های دوم و سوم را جابجا کنیم. در این صورت خواننده می بایست از یکی از شاخه های دیاگرام شش ضلعی استفاده کند و ماتریس σ_2 را بدست آورد.

■ **تمرین:** از یکی از شاخه های دیاگرام شش ضلعی استفاده کنید و ماتریس σ_2 را بدست آورید. راهنمایی: به عنوان مثال نشان دهید که:

$$(\sigma_2)_{0p} = (F)_{0m} R_{11}^m ((F)^{-1})_{mp} \quad (102)$$

که در آن منظور از ماتریس F همان ماتریس F_{111}^1 است. درستی جواب خود را می توانید به این شیوه تحقیق کنید که ماتریس های بدست آمده می بایست در رابطه

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \quad (103)$$

صدق کنند. این کار را می توانید با متمتیکا انجام دهید.

به این ترتیب روی یک کیوبیت که از سه انیون تشکیل شده می توانیم دو عمل مقدماتی انجام دهیم. اگر از چپ به راست انیون اول و دوم را جابجا کنیم عملگر σ_1 و اگر انیون دوم و سوم را جابجا کنیم عملگر σ_2 را روی کیوبیت اعمال کرده ایم. نگاه دقیق تری به این دو عملگر می اندازیم. عملگر اول برابر است با:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} e^{\frac{4\pi i}{5}} & 0 \\ 0 & -e^{\frac{2\pi}{5}} \end{pmatrix} = e^{\frac{11\pi i}{10}} \begin{pmatrix} e^{-\frac{3\pi i}{10}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{3\pi}{10}} \end{pmatrix} = e^{-\frac{3\pi i}{10}} \sigma_z = R_z\left(\frac{3\pi}{5}\right). \quad (104)$$

به این ترتیب با جابجا کردن دو انیون اول و دوم می توانیم دوران هایی حول محور z به اندازه مضارب $\frac{3\pi}{5}$ روی کیوبیت منطقی خود اعمال کنیم.

■ **تمرین:** مجموعه کامل دوران هایی را که می توانیم با جابجا کردن دو انیون اول و دوم اعمال کنیم بدست آورید. آیا این مجموعه متناهی است؟

با جابجا کردن انیون های دوم و سوم می توانیم یک دوران دیگر را نیز تولید کنیم. این دوران را با $R_n(\theta)$ نشان می دهیم.

■ **تمرین:** مشخص کنید که این دوران حول چه محوری و به اندازه چه زاویه ای است. این کار را می توانید با متمتیکا انجام دهید. زاویه و محور دوران را مشخص کنید. خواهید دید که محور این دوران با محور های سه گانه x, y, z موازی نیست.

با ترکیب های متوالی و دلخواه دو دوران مثل $R_n(\theta)$ و $R_z\left(\frac{3\pi}{5}\right)$ می توانید هر نوع گیتی را روی کیوبیت منطقی توپولوژیک اعمال کنید. هرگاه دو دسته سه تایی از این انیون های فیبوناچی داشته باشیم، می توانیم با جابجا کردن به روش مناسب، یک گیت کنترلی را نیز اعمال کرد. برای مطالعه بیشتر می توانید به مقاله [۱] و مراجع آن نگاه کنید:

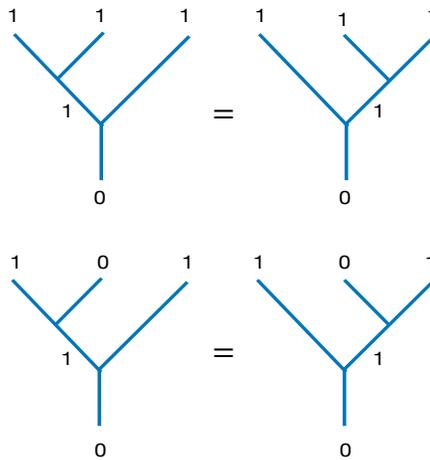
علاوه بر نتایج دیگر، در این مقاله یک نتیجه مهم نیز گزارش شده است و آن اینکه برای اعمال گیت های فوق تنها لازم است یکی از انیون های فیبوناچی را کنترل کرده و حرکت دهیم و انیون های دیگر را می توانیم ثابت نگاه داریم. شکل های زیر که گویای این نتایج اند از همین مقاله گرفته شده اند.

۱۵ ضمیمه یک: حل اتحاد پنتاگون برای انیون های فیبوناچی

در این ضمیمه سعی می کنیم اتحاد پنتاگون را برای انیون های فیبوناچی حل کنیم و عناصر ماتریس

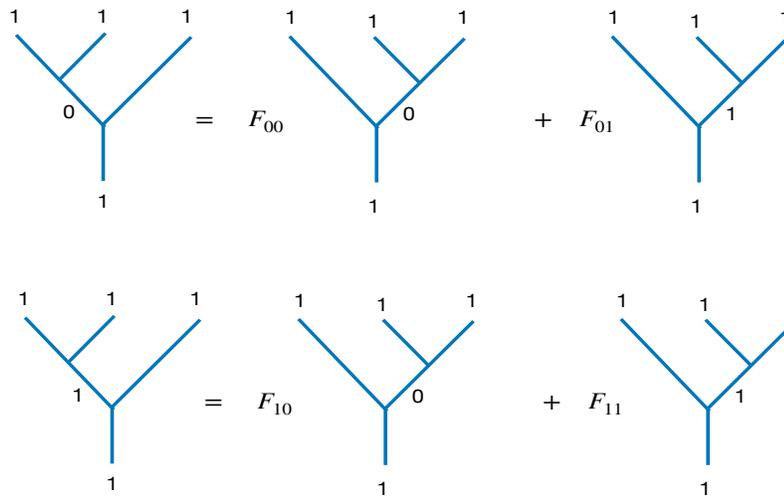
$$F = \begin{pmatrix} F_{00} & F_{01} \\ F_{10} & F_{11} \end{pmatrix} \quad (۱۰۵)$$

را بدست آوریم. این کار را با بررسی دیاگرام های ترکیب انجام می دهیم. نخستین دیاگرام در شکل (۳۱) نشان داده شده است. وقتی که بار کل برابر با 0 است، قاعده ترکیب بارهای توپولوژیک، فقط و فقط یک راه برای این دیاگرام ها مستقل از این که ترکیب این بارها از چپ به راست صورت بگیرد یا از راست به چپ. خواننده براحتی می تواند درستی این ادعا را تحقیق کند.



شکل ۳۱: سه انیون را که بار مجموع آنها برابر با صفر است، فقط به یک ترتیب می توان با هم ترکیب کرد.

وقتی که بار کل ناشی از ترکیب سه انیون برابر با 1 است، دو راه برای این ترکیب وجود دارد که قواعد یا دیاگرام های شکل (۳۲) را پدید می آورد. هدف ما هم این است که ضرایب موجود در این بسط ها را بدست آوریم.



شکل ۳۲: سه انیون که مجموع بار آنها برابر با یک است، به دو طریق می توانند ترکیب شوند.

برای این کار مطابق با اتحاد پنتاگون پیش می رویم و نخست مسیر بالایی در این پنج ضلعی را طی می کنیم و در هر مرحله با دقت از دیاگرام

(۳۱) و (۳۲) استفاده می کنیم تا به دیاگرام (۳۳) برسیم.

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 1 \\ | \\ 1 \end{array} = F_{00} \begin{array}{c} 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 1 \\ | \\ 1 \end{array} + F_{01} \begin{array}{c} 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 1 \\ | \\ 1 \end{array} \\
 & = F_{00} \begin{array}{c} 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 1 \\ | \\ 1 \end{array} + F_{01} \left(F_{10} \begin{array}{c} 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 1 \\ | \\ 1 \end{array} + F_{11} \begin{array}{c} 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 1 \\ | \\ 1 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

شکل ۳۳: اگر انیون ها را از چپ به راست شماره گذاری کنیم، در ردیف اول، قاعده ترکیب را در باره سه انیون سمت چپ یعنی انیون های (۱،۲،۳) بکار برده ایم. در ردیف دوم قاعده های (۳۱) و (۳۲) را در باره سه انیون (۴،(۲،۳)،۱) به کار برده ایم.

با یک بار دیگر استفاده از شکل های (۳۱) و (۳۲) می فهمیم که مسیر بالایی پنج ضلعی به رابطه نشان داده شده در شکل (۳۴) می رسد:

$$\begin{aligned}
 & = F_{00} \left(F_{00} \begin{array}{c} 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 1 \\ | \\ 1 \end{array} + F_{01} \begin{array}{c} 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 1 \\ | \\ 1 \end{array} \right) + F_{01} F_{10} \begin{array}{c} 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 1 \\ | \\ 1 \end{array} \\
 & + F_{01} F_{11} \left(F_{10} \begin{array}{c} 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 1 \\ | \\ 1 \end{array} + F_{11} \begin{array}{c} 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 1 \\ | \\ 1 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

شکل ۳۴: در شکل قبلی قاعده های (۳۱) و (۳۲) را در باره سه انیون سمت راست یعنی انیون ها (۲،۳،۴) به کار برده ایم.

سرانجام پس از خلاصه کردن متوجه می شویم که طی کردن مسیر بالایی در این پنج ضلعی منجر به رابطه نشان داده شده در دیاگرام (۳۵) می

روابط بالا به صورت زیر هستند:

$$a^2 + bcd = 0, \quad bc = a, \quad a + d^2 = 1. \quad (108)$$

که حل آن چنین است:

$$a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad bc = a. \quad (109)$$

یکانی بودن ماتریس F نیازمند آن است که $b = c$ باشد. به این ترتیب شکل نهایی ماتریس F پیدا می شود:

$$F = \begin{pmatrix} \phi & \sqrt{\phi} \\ \sqrt{\phi} & -\phi \end{pmatrix} \quad (110)$$

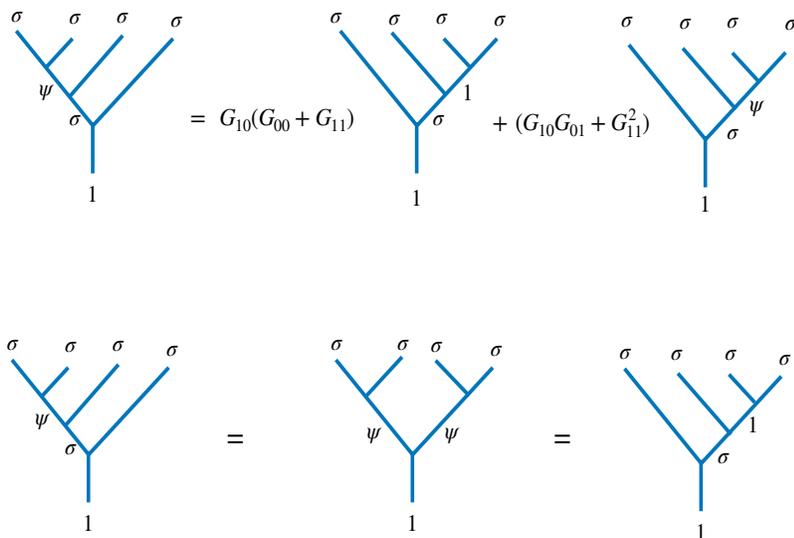
که در آن $\phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ معروف به عدد طلایی است.

۱۶ ضمیمه دو: حل اتحاد پنتاگون برای انیون های آیزینگ

در این ضمیمه اتحاد پنتاگون را برای انیون های آیزینگ حل می کنیم. نخست توجه می کنیم که حالت های یک کیوبیت به صورت زیر از روی انیون های آیزینگ ساخته می شوند:

$$|\bar{0}\rangle = |(\sigma, \sigma)_1, \sigma\rangle_\sigma, \quad |\bar{1}\rangle = |(\sigma, \sigma)_\psi, \sigma\rangle_\sigma. \quad (111)$$

حال ترکیب چهار انیون از نوع σ را در نظر می گیریم. بار کل این چهار انیون تنها می تواند برابر با 1 باشد، در حالی که برای بارهای داخلی این انیون ها دو حالت امکان پذیر است. این دو حالت در دیاگرام های سمت چپ شکل های (۳۷) و (۳۸) نشان داده شده اند. در هر کدام از این شکل هادو مسیر متفاوت را مطابق با اتحاد پنج ضلعی طی می کنیم و به دو نتیجه متفاوت می رسیم که باید با هم برابر باشند. نخست به شکل (۳۷) توجه می کنیم. در این شکل نشان داده شده که طی کردن مسیر بالا در اتحاد پنج ضلعی حالت سمت چپ را به صورت ترکیب حالت های سمت راست در می آورد.



شکل ۳۷: اتحاد پنج ضلعی برای آنیون های آیزینگ. طی کردن مسیر بالا منجر به رابطه (۱) و طی کردن مسیر پایین منجر به رابطه (۲) می شود.

به بیان دیگر این رابطه چنین است:

$$|((\sigma, \sigma)_\psi, \sigma)_\sigma, \sigma\rangle_1 = G_{00}(G_{00} + G_{11})|\sigma, (\sigma, (\sigma, \sigma)_1)_\sigma\rangle_1 + (G_{10}G_{01} + G_{11}^2)|\sigma, (\sigma, (\sigma, \sigma)_\psi)_\sigma\rangle_1 \quad (112)$$

طی کردن مسیر پایین نیز همان حالت را به صورت ترکیب متفاوتی از حالت های سمت راست در می آورد. به بیان دیگر داریم:

$$|((\sigma, \sigma)_\psi, \sigma)_\sigma, \sigma\rangle_1 = |\sigma, (\sigma, (\sigma, \sigma)_1)_\sigma\rangle_1. \quad (113)$$

مقایسه دو طرف این روابط با هم به نتیجه زیر می رسد:

$$\begin{aligned} G_{00} + G_{11} &= 0 \\ G_{10}G_{01} + G_{11}^2 &= 1. \end{aligned} \quad (114)$$

اما این روابط به طور کامل ماتریس G را تعیین نمی کنند، بلکه نشان می دهند که این ماتریس چنین شکلی دارد:

$$G = \begin{pmatrix} a & \sqrt{1-a^2} \\ \sqrt{1-a^2} & -a \end{pmatrix}. \quad (115)$$

برای تعیین کامل این ماتریس باید یک حالت دیگر را نیز در نظر بگیریم که در شکل (؟؟) نشان داده شده است. این رابطه به نتیجه زیر منتهی می شود:

$$\begin{aligned} G_{10} &= G_{11} \\ G_{10}(G_{00} + G_{11}) &= 1. \end{aligned} \quad (116)$$

مجموعه این روابط شکل ماتریس G را تعیین می کنند. بنابراین برای مدل آیزینگ داریم:

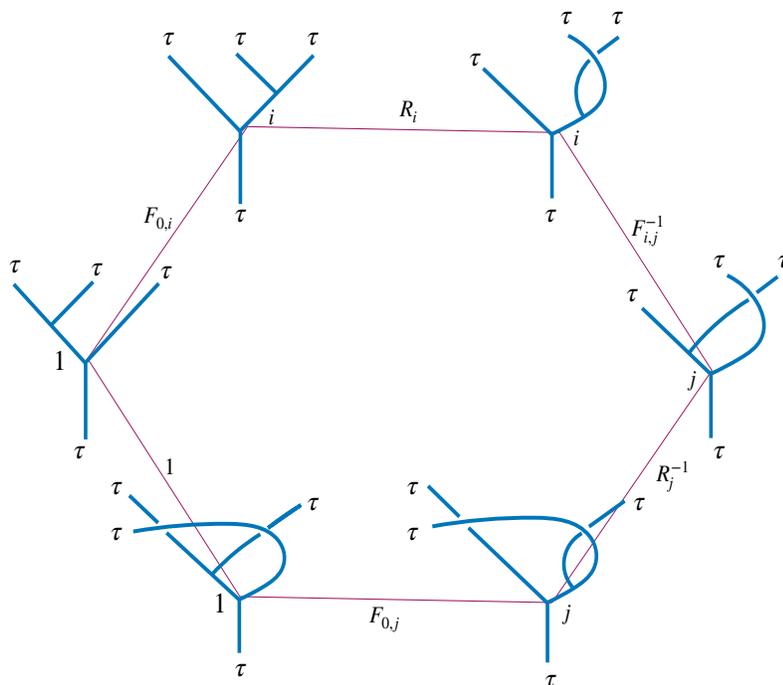
$$G = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (117)$$

۱۷ ضمیمه سه: ماتریس R برای آنیون های فیبوناچی

در این بخش ماتریس R را برای آنیون های فیبوناچی بدست می آوریم. نخست می دانیم که جابجا کردن دو آنیون که یکی از آنها بار 1 دارد و درواقع به معنای خلاء است هیچ نوع فازی ایجاد نمی کند، یعنی

$$R_{1,\tau}^\tau = R_{11}^1 = 1.$$

می خواهیم فازهای $R_{\tau,\tau}^\tau := R_1$ و $R_0 := R_{\tau,\tau}^1$ را پیدا کنیم. برای این کار طبیعتا باید اتحاد شش ضلعی یا اتحاد هکزاگون را حل کنیم. شکل (۳۸) این اتحاد را برای یک حالت اولیه معین نشان می دهد.



شکل ۳۸: اتحاد شش ضلعی برای انیونهای فیوناچی برای وقتی که حالت اولیه $|\tau, \tau\rangle_{1, \tau}$ است.

دقت کنید که ماتریس $F = \begin{pmatrix} \phi & \sqrt{\phi} \\ \phi & -\phi \end{pmatrix}$ با اندیس های 0 برای آنیون 1 و 1 برای τ نوشته شده است. یعنی

$$F_{00} = -F_{11} = \phi \quad F_{01} = F_{10} = \sqrt{\phi}.$$

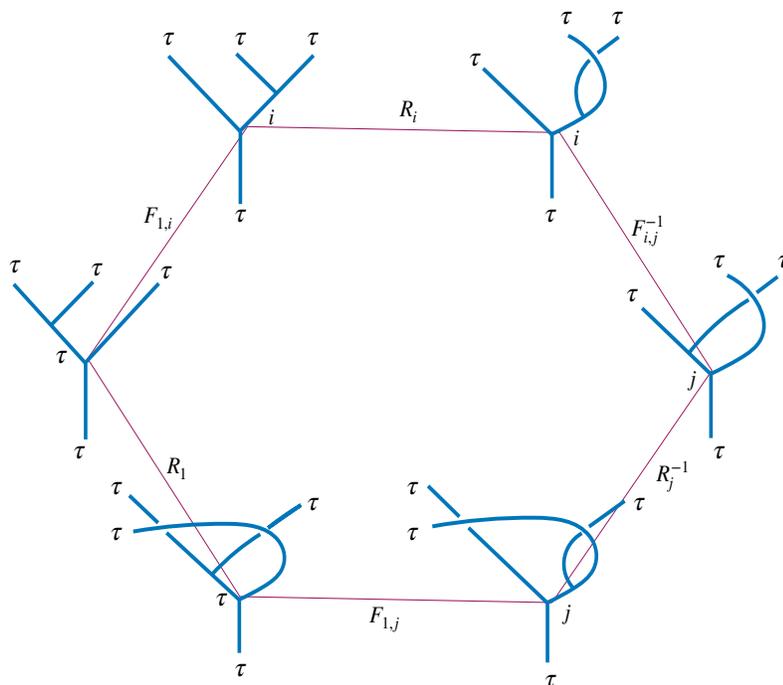
با طی کردن دو مسیر بالا و پایین در این شکل و دقت در ضرایبی که در هر مرحله بدست می آوریم به رابطه زیر می رسم:

$$F_{0,i} R_i F_{i,j}^{-1} = F_{0,j} R_j^{-1} \quad (118)$$

و یا:

$$F_{0,0} R_0 F_{0,0}^{-1} + F_{0,0} R_0 F_{0,1}^{-1} + F_{0,1} R_1 F_{1,0}^{-1} + F_{0,1} R_1 F_{1,1}^{-1} = F_{0,0} R_0^{-1} + F_{0,1} R_1^{-1}. \quad (119)$$

می توانیم همین کار را با اتحاد شش ضلعی نشان داده شده در شکل (۳۹) انجام دهیم که در این صورت به رابطه زیر می رسم:



شکل ۳۹: اتحاد شش ضلعی برای انیونهای فیبوناچی برای وقتی که حالت اولیه $|\tau, \tau\rangle_{\tau}$ است.

$$F_{1,i}R_iF_{i,j}^{-1} = R_1F_{1,j}R_j^{-1} \quad (120)$$

$$F_{1,0}R_0F_{0,0}^{-1} + F_{1,0}R_0F_{0,1}^{-1} + F_{1,1}R_1F_{1,0}^{-1} + F_{1,1}R_1F_{1,1}^{-1} = R_1F_{1,0}R_0^{-1} + R_1F_{1,1}R_1^{-1}. \quad (121)$$

با قرار دادن مقادیر F_{ij} در این دو رابطه، به دستگامی از معادلات می رسمیم که مقادیر R_0 و R_1 را تعیین خواهد کرد. این کار بر عهده خواننده است که نشان دهد این مقادیرها برابرند با:

$$R_0 = e^{-\frac{4\pi i}{5}} \quad R_1 = e^{\frac{3\pi i}{5}}. \quad (122)$$

■ **تمرین:** ماتریس R را برای آنیون های آیزینگ بدست آورید. راهنمایی: لازم نیست که دیاگرام های جدیدی رسم کنید، کافی است همان دیاگرام های مربوط به آنیون های فیبوناچی را در نظر بگیرید و نام آنیون ها را عوض کنید. در این جا هم دو دیاگرام لازم خواهید داشت،

یکی آنکه از حالت $|(\sigma, \sigma)_1, \sigma\rangle_\sigma$ شروع می شود و دیگری آنکه از حالت $|(\sigma, \sigma)_\psi, \sigma\rangle_\sigma$ شروع می شود. اگر مسئله را درست حل کنید به مقادیر زیر خواهید رسید:

$$R_0 = R_{\sigma, \sigma}^1 = e^{-\frac{i\pi}{8}}, \quad R_1 = R_{\sigma, \sigma}^\psi = e^{3\frac{i\pi}{8}},$$